Fiche 8: Produit scalaire et applications

Définition du produit scalaire:

<table>
<tr><th>Définitions:</th><th>Exemples:</th></tr>
<tr><td>

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls: et trois points A, B et C distincts du plan tels que: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

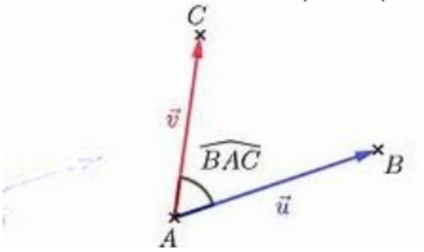
On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ le nombre

$\|\vec{u}\| = AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par:

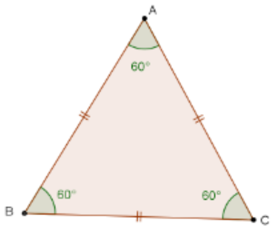
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u} \,;\, \vec{v}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$



</td><td>

1) Soit un triangle équilatéral ABC tel que $AB = a$:



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,,\, \overrightarrow{AC}\right) = a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

2) On considère trois points A(1;1), B(3;2) et C(4;5).

De plus l'angle $\widehat{BAC} = 135\,°$.

Calculons $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, AB et AC :

$\overrightarrow{BA}\ (1-3\,;\,1-2)$ soit $\overrightarrow{BA}\ (-2\,;\,-1)$

$\overrightarrow{BC}\ (4-3\,;\,5-2)$ soit $\overrightarrow{BC}\ (1\,;\,3)$

$BA = \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

On en déduit :

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \sqrt{50} \times \cos(135\,°)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 5\sqrt{2} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = -5$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Propriété et projeté orthogonal:</th><th>Exemple:</th></tr>
<tr><td>

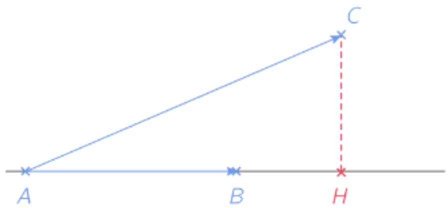
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls:

1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

2) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même contraires: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

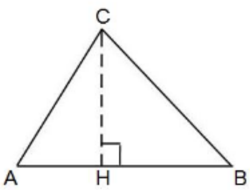
Projeté orthogonal:

Si A, B et C sont trois points du plan tels que A et B sont distincts, alors on appelle le projeté orthogonal du point C
sur la droite (AB) le point H, intersection de la droite (AB) et de la perpendiculaire à (AB) passant par C

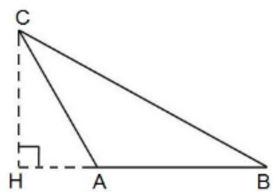


Si A, B et C sont trois points du plan tels que A et B sont distincts et H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH \text{ , } si\ \widehat{BAC} < \frac{\pi}{2} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH \text{ , } si\ \widehat{BAC} > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



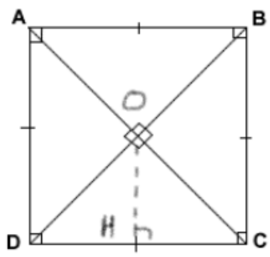
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$
$= AB \times AH$
si H est sur la demi-droite [AB).



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$
$= -AB \times AH$
si H n'est pas sur la demi-droite [AB).

</td><td>

ABCD un carré de côté a:

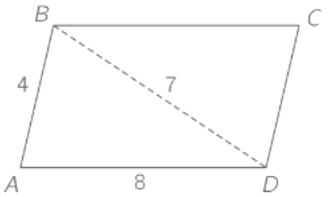


a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux;

b) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -a \times a = -a^2$ car les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires mais de sens contraire;

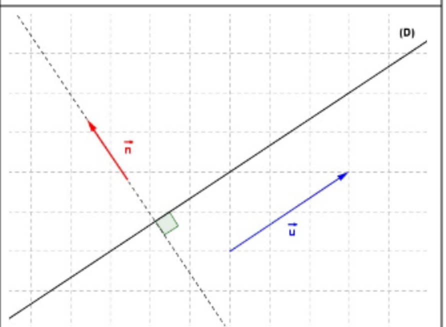
c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DH} = a \times \frac{1}{2}\, a = \frac{1}{2}\, a^2$ car H est le projeté orthogonal de O sur la droite (DC) et les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DO}$ sont colinéaires et de même sens.

</td></tr>
</table>

Définitions et conséquences:	*Exemples:*
On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel défini par: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$ Soit $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé, $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ on a alors: $\vec{u}\cdot\vec{v}=x\times x'+y\times y'$ On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux *Conséquence*: Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre. Si $\vec{u}$ est le vecteur directeur de (d) et $\vec{v}$ le vecteur de (d'): $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{-\pi}{2}$ (2π)	1) Soit ABCD un parallélogramme tel que: $AB=4$, $AD=8$ et $BD=7$  $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2-\|\overrightarrow{BA}\|^2\right]$ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$ (car ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et on utilise la relation de Chasles) $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{BD}\|^2-\|\overrightarrow{BC}\|^2-\|\overrightarrow{BA}\|^2\right]=\frac{1}{2}\left[BD^2-BC^2-BA^2\right]$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\left[7^2-8^2-4^2\right]$ (car ABCD est un parallélogramme donc $BC=AD=8$) $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\left[49-64-16\right]=\frac{1}{2}\times(-31)$ Donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{-31}{2}$ 2) Soit $\vec{u}\,(4\,;2)$ et $\vec{v}\,(3\,;-6)$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=x\times x'+y\times y'=4\times3+2\times(-6)=12-12=0$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. 3) On considère les droites (AB) et (CD): on donne: quatre points A(-1;2) , B(5;0) ; C(3;4) et D(6;13) . Les vecteurs directeurs respectifs des droites (AB) et (CD) sont: $\overrightarrow{AB}\,(6\,;-2)$ et $\overrightarrow{CD}\,(3\,;9)$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=x\times x'+y\times y'=18-18=0$ Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. Par conséquent, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Propriétés:	*Exemples:*
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $k\in\mathbb{R}$: 1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$; 2) $\vec{0}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{0}=\vec{0}$; 3) $k(\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\,\vec{v})=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$; 4) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$; 5) $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^{\,2}$ est appelé *carré scalaire* de $\vec{u}$ et on a: $\vec{u}^{\,2}=\|\vec{u}\|^2$; 6) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^{\,2}+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}$; 7) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^{\,2}-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^{\,2}$; 8) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^{\,2}-\vec{v}^{\,2}$	ABCD est un parallélogramme tel que $AB=4$, $AD=3$ et $\widehat{BAD}=60°$ Calcul de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ car ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}^{\,2}+AB\times AD\times\cos(\widehat{BAD})$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4^2+4\times3\times\frac{1}{2}=16+6=22$ Calulons la longueur AC: $AC^2=\overrightarrow{AC}^{\,2}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2$ $AC^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=\overrightarrow{AB}^{\,2}+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^{\,2}$ $AC^2=4^2+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+3^2=25+2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=25+2\times4\times3\times\frac{1}{2}$ $AC^2=25+12=37$ donc $AC=\sqrt{37}$

Vecteur normal à une droite:

Définition:	*représentation graphique:*
Dans le plan, on dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à une droite (D) s'il est orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux: $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$	

Equations droites :	*Exemple :*
Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul du plan. La droite (D) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M du plan tels que: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ Dans un repère orthonormé du plan, on a: $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$, $M(x\,;\,y)$ et $\vec{n}(a\,;\,b)$: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$ $\Leftrightarrow\ ax+by+\left(-ax_A-by_A\right)=0$ d'où l'équation cartésienne de la droite (D). Soient a et b deux réels NON simultanément nuls et c un réel quelconque. Toute relation de la forme $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de vecteur normal $\vec{n}(a\,;\,b)$	Dans un repère orthonormé (O;I,J) du plan, on donne les points A(2;1), B(4;5) Cherchons une équation de la droite (AB): Vecteur directeur de la droite (AB): *L'équation cartésienne de la droite (AB) est de la forme $ax+by+c=0$ où a et b sont différents de 0* *Un vecteur directeur de cette droite est : $\vec{u}(-b\,;\,a)$* $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A\right)$ soit $\overrightarrow{AB}(2\,;\,4)$ Soit $b=-2$ et $a=4$ Le vecteur normal est: $\vec{n}(4\,;\,-2)$ M est un point quelconque, $M(x\,;\,y)$: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 4(x-2)-2(y-1)=0$ $\Leftrightarrow\ 4x-8-2y+2=0$ $\Leftrightarrow\ 4x-2y-6=0$ est une équation cartésienne de la droite (D).

A mémoriser :

Equations:	Vecteur directeur:	Vecteur normal:	Coefficient directeur:
Cartésiennes: $ax+by+c=0$	$\vec{u}(-b\,;\,a)$	$\vec{n}(a\,;\,b)$	$m=-\dfrac{a}{b}$, $b\neq 0$
Réduites: $y=mx+p$	$\vec{u}(1\,;\,m)$	$\vec{n}(m\,;\,-1)$	m

Equations cercles :	*Exemples:*
Dans un repère orthonormé du plan: 1) Le cercle de centre $\Omega\left(x_0\,;\,y_0\right)$ et de rayon r a pour équation: $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=r^2$ 2) Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points vérifiant : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (un point M appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si la droite (MA) est perpendiculaire à la droite (MB).	1) Cherchons l'équation cartésienne du cercle C de centre $\Omega(4\,;\,-3)$ et de rayon $r=5$ $(x-4)^2+(y+3)^2=5^2=25$ 2) Déterminons une équation du cercle de diamètre [BC] avec B(-1;2) et C(4;2): $M(x\,;\,y)$ un point quelconque. $\overrightarrow{MB}(-1-x\,;\,2-y)$ et $\overrightarrow{MC}(4-x\,;\,2-y)$ $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = (-1-x)\times(4-x)+(2-y)^2$ $=-4+x-4x+x^2+4-4y+y^2=x^2-3x+y^2-4y=0$ Une équation du cercle de diamètre [BC] est: $x^2-3x+y^2-4y=0\quad(E)$ On pose: $x^2-3x=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$ et $y^2-4y=(y-2)^2-4$ On remplace dans (E) est on obtient: $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}+(y-2)^2-4=0$ $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\dfrac{9}{4}+4=\dfrac{9+16}{4}=\dfrac{25}{4}$ $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$ Cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2}\,;\,2\right)$ et de rayon $r=\dfrac{5}{2}$