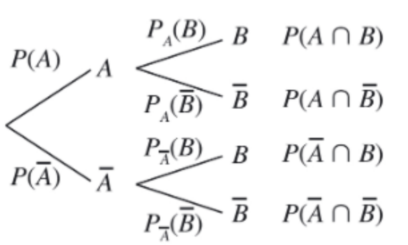
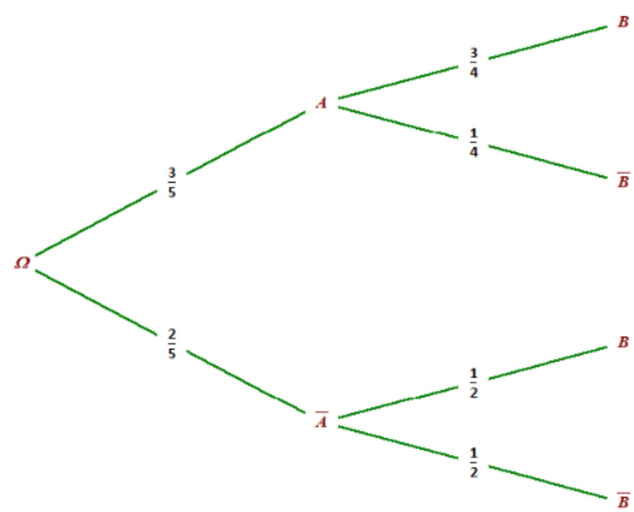
Fiche 6: Probabilités conditionnelles

Définition:	Probabilités composées:
On utilise la notion de probabilité conditionnelle quand le déroulement d'une expérience aléatoire est modifiée par la donnée d'une information modifiant ainsi la probabilité d'un événement. Soient A et B deux évènements d'un même univers tel que $p(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé se note $p_A(B)$ et on a : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{P(A)}$ On peut également écrire: $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ *Exemple:* On tire une carte dans un jeu de 32 cartes On considère les événemts suivants: A:"La carte tirée est un roi" et B:"la carte tirée est un trèfle" Donc l'événement $A \cap B$:"La carte tirée est le roi de trèfle" $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$ Sachant que la carte tirée est un trèfle, quelle est la probabilité que ce soit le roi: $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{32}}{\frac{8}{32}} = \dfrac{1}{8}$	Soient A et B deux événements d'un même univers tels que: $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ Alors on a: $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) = P_A(B) \times P(A)$ *Propriétés:* On considère deux événements A et B, avec $P(A) \neq 0$ 1) $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$ 2) $P_A(B) + P_A\left(B^{-}\right) = 1$ soit $P_A\left(B^{-}\right) = 1 - P_A(B)$ 3) $P_A(A) = 1$ et $P_A(\emptyset) = 0$

Formule des probabilités totales:
Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$ si $\left\{A_1 ; A_2 ; \cdot \cdot \cdot ; A_n\right\}$ est une partition de Ω alors pour tout événement B de Ω. $P(B) = P\left(A_1 \cap B\right) + P\left(A_2 \cap B\right) + \cdot \cdot \cdot + P\left(A_n \cap B\right)$

Arbre pondéré:	Probabilités composées:	Probabilités totales:
	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ $P\left(A \cap B^{-}\right) = P(A) \times P_A\left(B^{-}\right)$ $P\left(B \cap A^{-}\right) = P\left(A^{-}\right) \times P_{A^{-}}(B)$ $P\left(A^{-} \cap B^{-}\right) = P\left(A^{-}\right) \times P_{A^{-}}\left(B^{-}\right)$	$P(B) = P(A \cap B) + P\left(A^{-} \cap B\right)$ $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P\left(A^{-}\right) \times P_{A^{-}}(B)$ $P\left(B^{-}\right) = P\left(A \cap B^{-}\right) + P\left(A^{-} \cap B^{-}\right)$ $P\left(B^{-}\right) = P(A) \times P_A\left(B^{-}\right) + P\left(A^{-}\right) \times P_{A^{-}}\left(B^{-}\right)$

Règles:
1) La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud *est égale à 1*. 2) La probabilité d'un chemin est le *produit des probabilités* figurant sur ces branches. 3) La probabilité d'un événement est la *somme des probabilités* de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet événement.

Exemple:	*Arbre pondéré:*
Un footballeur tire successivement deux pénaltys On considère les événements suivants: A:"Le joueur marque le premier pénalty" B:"Le joueur marque le second pénalty" On sait que: $P(A) = \frac{3}{5}$; $P_A\left(\overline{B}\right) = \frac{1}{4}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{2}$	

Probabilités composées:	Probabilités totales:
$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$	$P(B) = \frac{3}{20} + \frac{1}{5} = \frac{7}{20}$
$P\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$	
$P\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$	$P\left(\overline{B}\right) = \frac{9}{20} + \frac{1}{5} = \frac{13}{20}$
$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$	

Tableau à double entrée:

Méthode:	*Explications:*

	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A \cap B) = \boxed{1}$	$P\left(A \cap \overline{B}\right) = \boxed{3}$	$P(A) = \boxed{1} + \boxed{3}$
$\overline{A}$	$P\left(\overline{A} \cap B\right) = \boxed{2}$	$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \boxed{4}$	$P\left(\overline{A}\right) = \boxed{2} + \boxed{4}$
Total	$P(B) = \boxed{1} + \boxed{2}$	$P\left(\overline{B}\right) = \boxed{3} + \boxed{4}$	1

La probabilité de $A \cap B$ se situe à l'intersection de la ligne A et de la colonne B

La probabilité de A s'obtient dans la colonne total

Donc on peut calculer : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{P(A)}$

Exemple:	*Calculs:*

Durant un séjour à la montagne on constate que 80% des vacanciers pratiquent le ski et 60% de ces skieurs sont des hommes.
Parmi les non-skieurs, 40% sont des hommes.
On choisit au hasard un vacancier.
Les événements A et B sont définis par:
A:"Le vacancier choisi est un skieur"
B:"Le vacancier choisi est un homme".

D'où $P(A) = 0,8$ donc $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2$

	A	$\overline{A}$	Total
B	$P(A \cap B) = 0,48$	$P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,08$	$P(B) = 0,56$
$\overline{B}$	$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,32$	$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,12$	$P\left(\overline{B}\right) = 0,44$
Total	$P(A) = 0,8$	$P\left(\overline{A}\right) = 0,2$	1

80% des vacanciers pratiquent le ski et 60% de ces skieurs sont des hommes.

$P(A \cap B) = \frac{80}{100} \times \frac{60}{100} = 0,48$

$P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right)$

donc $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$

$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,8 - 0,48 = 0,32$

Parmi les non-skieurs, 40% sont des hommes.

$P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$ d'où $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

soit $P\left(\overline{A}\right) = 0,2$

$P\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} = 0,08$

$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,48 + 0,08 = 0,56$

D'où $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0,56 = 0,44$

Evénements indépendants: définition et propriété	*Exemples:*
Deux événements A et B tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ **Les événemnts A et B sont *indépendants* signifie que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$** **On a les équivalences suivantes:** ***A et B indépendants*** $\Leftrightarrow P_B(A) = P(A) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$ ***Propriétés:*** **1) Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.** **2) Si A et B sont deux événements indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.** **3) Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.** ***Ne pas confondre indépendant et incompatible!!*** **1) Si A et B sont *incompatibles*, on a: $A \cap B = \emptyset$, c'est à dire que A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps.** **2) Les événemnts A et B sont *indépendants* signifie que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, c'est à dire que la réalisation de l'un ne dépend pas ou n'influe pas sur la réalisation de l'autre.**	**1) On tire une carte au hasard d'un jeu de 52 cartes.** **Les événements A et B sont définis comme suit:** **A:"obtenir un cœur" et B:"obtenir un roi"** **Il y a 13 coeurs et 4 roi dans le jeu de 52 cartes.** **Donc $P(A) = \frac{13}{52}$ et $P(B) = \frac{4}{52}$** **$A \cap B$: "on veut obtenir le roi de coeur".** **Donc $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$** **Vérifions: $P(A) \times P(B) = \frac{13}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{52}{(52)^2}$** **D'où $P(A) \times P(B) = \frac{1}{52}$** **Les événements A et B sont indépendants.** **2) On tire au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes.** **Les événements A et B sont définis comme suit:** **A:"obtenir un coeur" et B:"obtenir un pique"** **$A \cap B = \emptyset$ et donc $P(A \cap B) = 0$** **Les événements A et B sont incompatibles.**