Fiche 7: Variables Aléatoires

Loi de probabilité d'une variable aléatoire et ses paramètres:

Définition:

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
On appelle variable aléatoire X toute fonction définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note x_1 ; x_2 ; ... ; x_n les valeurs prises par X.
Définir une variable aléatoire X sur Ω, c'est associer un nombre réel à chaque issue de Ω

$\{X = x_i\}$ l'événement "la valeur aléatoire X prend la valeur x_i "
$\{X \geqslant x_i\}$ l'événemt "la variable aléatoire X prend une valeur supérieure ou égale à x_i "
On appelle loi de *probabilité de la variable aléatoire* X la fonction qui, à chaque x_i, associe la probabilité de l'événement $P(X = x_i) = p_i$
On peut écrire les résultats dans un tableau:

$X = x_i$	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ \dots + P(X = x_n) = 1 \quad (\text{ou } p_1 + p_2 + \ \dots + p_n = 1)$$

Paramètres:
1) Espérance mathématique de X :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \left(= \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i \right)$$

Le mot « espérance »vient du langage des jeux :
lorsque X désigne le gain, $E(X)$ est le *gain moyen* que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties.
2) Variance de X :

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n (x_n - E(X))^2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2$$

Autre formule de la variance:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

3) Écart-type de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

A retenir:
Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, il faut déterminer toutes les valeurs prises par X.
Puis calculer la probabilité de chacune de ces valeurss.
On calcule ces probabilités à l'aide de la loi définie sur l'ensemble de départ Ω qui est le plus souvent la loi équirépartie (on écrit tous les résultats dans un tableau).

Exemple:

Un jeu consiste à jeter un dé équilibré.
On définit une variable aléatoire X qui associe à chaque lancer le nombre.
- On perd 10 euros si on obtient le nombre 1;
- Le gain est nul si on obtient 2, 3, 4 ou 5
- On gagne 10 euros si on obtient le nombre 6.
La loi de probabilité est:

$X = x_i$	-10	0	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Calculons l'espérance:

$$E(X) = -10 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{2}{3} + 10 \times \frac{1}{6} = 0$$

Le jeu est donc *équitable*.
Calculons la variance:

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + p_3 (x_3 - E(X))^2$$

$$V(X) = \frac{1}{6} \times (-10)^2 + \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{6} \times (-10)^2$$

$$V(X) = \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$$

Son écart-type est:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

A retenir:
1) E(X) correspond aux gains moyens que l'on peut espérer obtenir en jouant un très grand nombre de fois..
- **Si $E(X) > 0$ alors le jeu est *favorable* au joueur.**
- **Si $E(X) < 0$ alors le jeu est *défavorable* au joueur.**
- **Si $E(X) = 0$ alors le jeu est *équitable*.**

2) L'écart type représente le "risque" du jeu:
- *Plus il est élevé, plus le risque est élevé.*

Transformation affine d'une variable aléatoire

<table>
<tr><th>Propriétés:</th><th>Exemple:</th></tr>
<tr><td>
Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
Pour tous réels a et b on peut définir une autre variable aléatoire en associant à chaque issue donnant la valeur x_i la nombre $a x_i + b$.
On note cette variable $a\mathrm{X} + b$

1) $\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) = a\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b$
2) $\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) = a^2 \times \mathrm{V}(\mathrm{X})$
3) $\sigma(a\mathrm{X}+b) = |a| \times \sigma(\mathrm{X})$
</td><td>
Alexis effectue à vélo le même parcours pour aller au lycée tous les jours.
Sur sa route il y a trois feux.
Une étude portant sur le nombre X de feux rouges a permis d'établir les résultats suivants:
<table>
<tr><td>$\mathrm{X} = x_i$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{P}\left(\mathrm{X} = x_i\right)$</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,2</td></tr>
</table>
$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,2 = 1,7$
$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = p_1\left(x_1 - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 + p_2\left(x_2 - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 + p_3\left(x_3 - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2$
$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 0,1 \times (0 - 1,7)^2 + 0,3 \times (1 - 1,7)^2 + 0,4 \times (2 - 1,7)^2 + 0,2 \times (3 - 1,7)^2$
$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 0,81$
Alexis sait que son parcours dure 15 minutes si les feux sont verts mais si le feu est rouge alors la durée du trajet augmente de 2 minutes.
Soit T la variable aléatoire qui donne la durée du trajet d'Alexis.
La relation qui lie X et T est:
$\mathrm{T} = 15 + 2\,\mathrm{X}$ (la durée est de 15 minutes auxquelles on ajoute 2 minutes par feu rouge).
$\mathrm{E}(\mathrm{T}) = 2 \times \mathrm{E}(\mathrm{X}) + 15 = 2 \times 1,7 + 15 = 18,4$
$\mathrm{V}(\mathrm{T}) = 2^2 \times \mathrm{V}(\mathrm{X}) = 4 \times 0,81 = 3,24$
</td></tr>
</table>