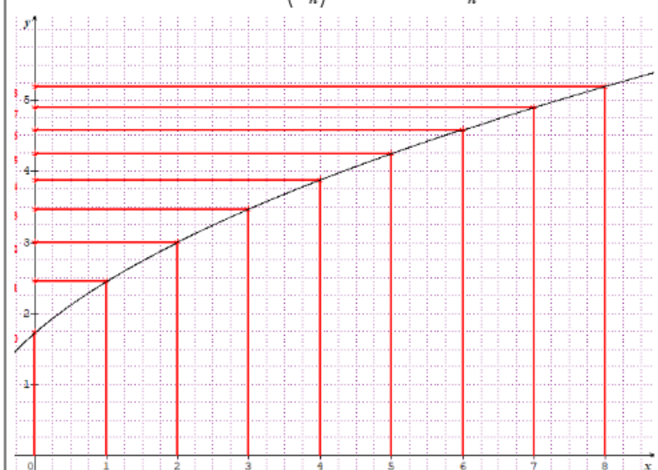
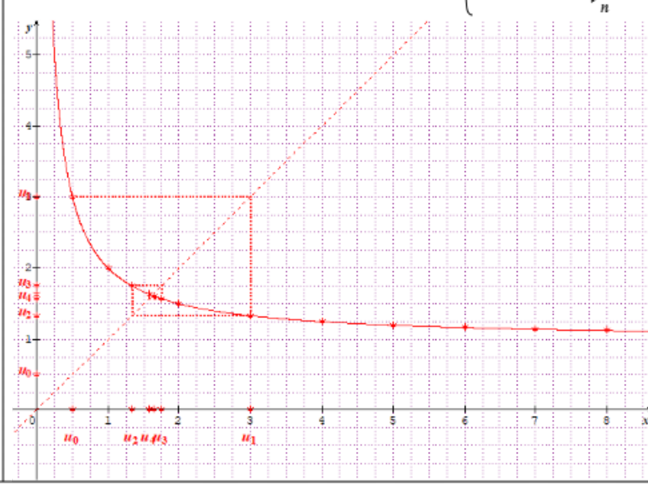
Fiche 4: Suites

Suites définie par une relation explicite:	*Suites définie par une relation de récurrence:*
Soit f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ **On définit une suite u en posant pour tout $n \in \mathrm{N}$, $u_n = \mathrm{f}(n)$: la suite u est définie par une relation explicite.** **On peut donc exprimer chaque terme de la suite en fonction de n.** *Exemple:* **La suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n = 5\,n - 10$ pour tout entier naturel n** **Donc $u_5 = 5 \times 5 - 10 = 25 - 10 = 15$**	**On peut définir une suite par les deux données suivantes:** **- un premier terme de la suite;** **- une expression d'un terme en fonction du (ou des) terme(s) précédent(s):** **On ne peut pas calculer un terme sans connaître le précédent: on calcule de proche en proche tous les termes à partir du premier terme.** *Exemple:* **On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie par: $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2\,n \times v_n + 2 \end{cases}$** **Calculons v_3 : ?** $v_1 = v_{0+1} = 2 \times 0 \times v_0 + 2 = 2$ $v_2 = v_{1+1} = 2 \times 1 \times v_1 + 2 = 2 \times (2) + 2 = 6$ $v_3 = v_{2+1} = 2 \times 2 \times v_2 + 2 = 2 \times (6) + 2 = 14$ *Attention:* *Ne pas confonfre u_{n+1} , le terme de rang $(n+1)$ ET $u_n + 1$ soit le terme de rang (n) auquel on ajoute 1*

Représentations graphiques :	*Exemples:*
La suite $\left(u_n\right)$ est représentée dans un repère $\left(O ; \vec{i} , \vec{?}\right)$ par les points de coordonnées $\left(n ; u_n\right)$ *Cas 1:* **On représente la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par: $\mathrm{f}(x) = \sqrt{3\,x + 3}$** **On place les points de coordonnées $\left(n ; \mathrm{f}(n)\right)$** *Cas 2:* **On représente la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par: $\mathrm{f}(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et de la droite d'équation $y = x$ (chaque point de cette droite possède une abscisse égale à son ordonnée).** ***Etape 1:* placer le point de coordonnées $\left(u_0 ; 0\right)$** ***Etape 2:* on cherche le point d'ordonnée $\mathrm{f}\left(u_0\right)$, on l'obtient en traçant une droite verticale passant par $\left(u_0 ; 0\right)$ et en cherchant son intersection avec la courbe C_f .** **Ce point a comme ordonnée $\mathrm{f}\left(u_0\right)$, ce qui correspond à u_1 car $u_1 = \mathrm{f}\left(u_0\right)$** ***Etape 3:* on projete horizontalement le point de coordonnées $\left(u_0 ; u_1\right)$ sur la droite "d" pour obtenir le point de coordonnées $\left(u_1 ; u_1\right)$, une projection verticale permet ensuite de repporter le point $\left(u_1 ; 0\right)$ sur l'axe des ordonnées.**	*Cas 1:* **On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par: $u_n = \sqrt{3\,n + 3}$**  *Cas 2:* **On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie par: $\begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n} \end{cases}$** 

Sens de variations:

<table>
<tr><th>Définition et propriété:</th><th>Exemples:</th></tr>
<tr><td>
1) La suite (u_n) est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
2) La suite (u_n) est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
3) La suite (u_n) est constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Pour montrer que la suite est strictement croissante ou décroissante, il suffit de montrer que les inégalités sont strictes

Propriété:
On considère un entier naturel k et une suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant k$ dont tous les termes sont strictement positifs .
1) La suite (u_n) est stictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$;
2) La suite (u_n) est strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
</td><td>
1) La suite (u_n) définie par $u_n = 5n - 10$ pour tout entier naturel n
$u_{n+1} = 5(n+1) - 10 = 5n - 5$
$u_{n+1} - u_n = 5n - 5 - (5n - 10) = 5n - 5 - 5n + 10 = 5 > 0$
La suite (u_n) est strictement croissante.
2) La suite (v_n) définie par $v_n = 5 \times 0{,}4^n - 3$ pour tout entier naturel n
$v_{n+1} = 5 \times 0{,}4^{n+1} - 3$
$v_{n+1} - v_n = 5 \times 0{,}4^{n+1} - 3 - \left(5 \times 0{,}4^n - 3\right) = 5\left(0{,}4^n \times 0{,}4^1 - 0{,}4^n \times 1\right)$
$v_{n+1} - v_n = 5 \times 0{,}4^n\,(0{,}4 - 1) = 5 \times 0{,}4^n \times (-0{,}6) = -3 \times 0{,}4^n < 0$
La suite (v_n) est strictement décroissante.
3) On considère la suite (w_n) définie par: $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = w_n + 2n - 4 \end{cases}$
$w_{n+1} - w_n = w_n + 2n - 4 - w_n = 2n - 4$
On sait que: $2n - 4 \geqslant 0 \iff n \geqslant 2$
La suite (w_n) est croissante à partir du rang $n = 2$.
4) On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par:
$t_n = 5 \times 6^n$, on constate que pout tout entier naturel n, $6^n > 0$ d'où $t_n > 0$
$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{5 \times 6^{n+1}}{5 \times 6^n} = \frac{6^n \times 6}{6^n} = 6 > 1$
La suite (t_n) est donc strictement croissante.
</td></tr>
</table>

Limite d'une suite:

<table>
<tr><th>Définition 1:</th><th>Définition 2:</th><th>Exemples:</th></tr>
<tr><td>
On dit que la suite (u_n) pour limite l si, et seulement si,
tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d’un certain rang.
On note alors :
$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$
On dit que la suite converge vers l
Si cette limite existe, alors elle est unique.
</td><td>
On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle $]A\,;\,+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;\,B[$) contient tous les termes de la suite à partir d’un certain rang.
On note alors :
$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
(resp. $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$)
On dit que la suite diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)
</td><td>
1) Soit la suite (u_n) définie pour tout n par:
$u_n = \frac{2n+1}{n+2}$
<table>
<tr><td>n</td><td>0</td><td>100</td><td>500</td><td>1000</td></tr>
<tr><td>u_n</td><td>0,5</td><td>1,9706</td><td>1,9940</td><td>1,9970</td></tr>
</table>
Les termes de la suite semble se rapprocher de 2
Il semblerait que la suite converge vers 2.
2) Soit la suite (u_n) définie pour tout n par:
$u_n = \frac{-2n^2+1}{n+2}$
<table>
<tr><td>n</td><td>80</td><td>100</td><td>150</td><td>1000</td></tr>
<tr><td>u_n</td><td>-156,086</td><td>-196,069</td><td>-296,046</td><td>-394,0350</td></tr>
</table>
$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
Il semblerait que la suite diverge.
3) Soit la suite (u_n) définie pour tout n par:
$u_n = (-1)^n$
Elle prend de manière alternée les valeurs -1 (n impair)ou 1 (n pair).
Elle n'a pas de limite (finie ou infinie) quand $n \mapsto +\infty$
Cette suite est divergente
</td></tr>
</table>

Suites arithmétiques et suites géométriques:

Suites arithmétiques:	Suites géométriques:
$u_{n+1}=u_n+r$; r est la raison Une suite arithmétique de raison r est une suite qui permet d'obtenir chaque terme en ajoutant la raison au terme précédent. Soit $\left(u_n\right)$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r 1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a: $u_n=u_0+n\times r$ 2) Pour tous entiers naturels n et p, on a: $u_n=u_p+(n-p)\times r$ La somme S_n des $(n+1)$ premiers termes $u_0+u_1 \ldots +u_n$ d'une suite arithmétique $\left(u_n\right)$ est: $S_n=\sum_{k=0}^{k=n} u_n = u_0+u_1+\cdot\cdot\cdot+u_n$ $S_n=\frac{(n+1)\left(u_0+u_n\right)}{2}$ $S_n=(nb\ \ termes)\times\frac{1^{er}\ terme+dernier\ \ terme}{2}$ Pour tout entier $n\geqslant 1$, on a: $1+2+\cdot\cdot+n=\frac{n(n+1)}{2}$	$u_{n+1}=q\times u_n$; q est la raison Une suite géométrique de raison q est une suite qui permet d'obtenir chaque terme en multipliant le terme précédent par la raison. Soit $\left(u_n\right)$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q 1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a: $u_n=u_0\times q^n$ 2) Pour tous entiers naturels n et p, on a: $u_n=u_p\times q^{n-p}$ La somme S_n des $(n+1)$ premiers termes $u_0+u_1 \ldots +u_n$ d'une suite géométrique $\left(u_n\right)$ de raison $q\neq 1$ est: $S_n=\sum_{k=0}^{k=n} u_n = u_0+u_1+\cdot\cdot\cdot+u_n$ $S_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $S_n=\left(1^{er}\ \ terme\right)\times\frac{1-q^{nb\ \ termes}}{1-q}$ Pour tout entier $n\geqslant 1$ et $q\neq 1$, on a: $1+q+q^2+\ \ldots+q^n=1\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemples: Suites arithmétiques	*Exemples: Suites géométriques*
1) La suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier naturel n par $u_n=3n-2$ $u_{n+1}-u_n=3(n+1)-2-(3n-2)=\cancel{3n}+3-\cancel{2}-\cancel{3n}+\cancel{2}=3$ La suite $\left(u_n\right)$ est arithmétique de raison $r=3$ 2) La suite $\left(u_n\right)$ est arithmétique de raison $r=-3$ et $u_{12}=12$ On peut calculer u_{17} : $u_{17}=u_{12}+(17-12)\times(-3)=12+5\times(-3)=12-15$ $u_{17}=-3$ 3) Pour prouver qu'une suite n'est pas arithmétique: on calcule 4 termes consécutifs et on calcule les 2 différences: Objectif: montrer que ces différences ne sont pas égales. Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=0{,}2\ u_n+4$ $u_1=0{,}2\times u_0+4=4{,}2$; $u_2=0{,}2\times u_1+4=4{,}84$ et $u_3=4{,}968$ $u_1-u_0=4{,}2-1=3{,}2$; $u_2-u_1=0{,}64$ et $u_3-u_2=0{,}128$ $u_1-u_0\neq u_2-u_1\neq u_3-u_2$ La suite $\left(u_n\right)$ n'est pas arithmétique 4) Calculons la somme suivante: $S=18+25+32+\ \ldots+165$ $S=18+(18+7)+(25+7)+\ \ldots+(158+7)$ Progression arithmétique de raison $r=7$ et de 1^{er} terme 18 Le nombre de terme est: $165=7\times 23+4$ et $18=7\times 2+4$ d'où $S=u_2+\ \ldots+u_{23}$ et donc le nombre de termes est: $n-p+1=23-2+1=22$ $S=22\times\frac{\left(u_2+u_{23}\right)}{2}=22\times\frac{18+165}{2}=11\times 183=2013$	1) On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n=5\times 0{,}6^n$ pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5\times 0{,}6^{n+1}}{5\times 0{,}6^n}=0{,}6$ La suite $\left(u_n\right)$ est géométrique de raisn $q=0{,}6$ et de 1^{er} terme 5 2) On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_0=1$ et pour tout n, $u_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)u_n+4$ On pose, pour tout n, $v_n=u_n-6$ $v_{n+1}=u_{n+1}-6=\left(\frac{1}{3}\right)u_n+4-6$ $v_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)u_n-2=\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(u_n-6\right)$ et donc $v_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)v_n$ La suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de 1^{er} terme $v_0=u_0-6=1-6=-5$ 3) Pour prouver qu'une suite n'est pas géométrique: on calcule 4 termes consécutifs et on calcule les 2 rapports: Objectif: montrer que ces rapports ne sont pas égaux. Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=0{,}2\ u_n+4$ $u_1=0{,}2\times u_0+4=4{,}2$; $u_2=0{,}2\times u_1+4=4{,}84$ et $u_3=4{,}968$ $\frac{u_1}{u_0}=\frac{4{,}2}{1}=4{,}2$; $\frac{u_2}{u_1}\approx 1{,}152$ et $\frac{u_3}{u_2}\approx 1{,}026$ $\frac{u_1}{u_0}\neq\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{u_3}{u_2}$; la suite $\left(u_n\right)$ n'est pas géométrique 4) Calculons la somme suivante: $S=1+3+9+27+\ \ldots+177147$ $S=1+(1\times 3)+(3\times 3)+(9\times 3)\ \ldots+(59049\times 3)$ Progression géométrique de raison $q=3$ et de 1^{er} terme 1 Le nombre de terme est: $3^0=1$ et $177147=3^{11}$ d'où $S=u_0+\ \ldots+u_{11}$ et donc le nombre de termes est: 12 $S=u_0\times\frac{1-q^{12}}{1-q}=1\times\frac{1-3^{12}}{1-3}=265720$

Sens de variations:

Suites arithmétiques: $u_{n+1} - u_n = r$	*Suites géométriques:* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$
1) $r > 0$, la suite est croissante; 2) $r < 0$, la suite est décroissante; 3) $r = 0$, la suite est constante. *Exemple:* La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n - 2$ On a vu que: $u_{n+1} - u_n = 3$ La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ Comme $r = 3 > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.	*Cas de la suite* (q^n) *:* 1) $q > 1$, la suite est croissante; 2) $q < 1$, la suite est décroissante; 3) $q = 1$, la suite est constante. *Cas d'une suite géométrique de raison q et de premier terme* u_0 *:* 1) $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, la suite est décroissante; 2) $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite est croissante; 3) $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, la suite est croissante; 4) $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite est décroissante; 5) $q < 0$, la suite n'est pas monotone (ie: ni croissante, ni décroissante, ni constante). *Exemple:* On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5 \times 0{,}6^n$ pour tout n, on a: $u_{n+1} = 5 \times 0{,}6^{n+1} = 5 \times 0{,}6^n \times 0{,}6 = 0{,}6\ u_n$ La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}6$ et de 1^{er} terme $u_0 = 5$ On a $0 < q = 0{,}6 < 1$ et $u_0 = 5 > 0$ Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.