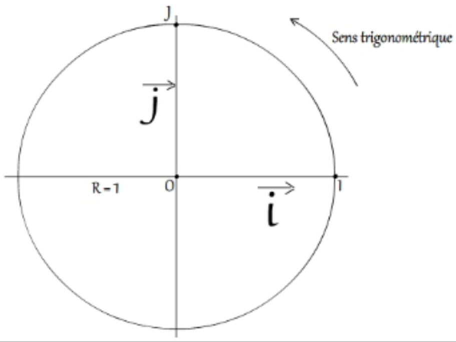
Fiche 3: Trigonométrie

Définition:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$
On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1, sur lequel on a choisi un sens de parcours : le sens inverse des aigiuilles d'une montre, appelé *sens direct* (ou sens positif).

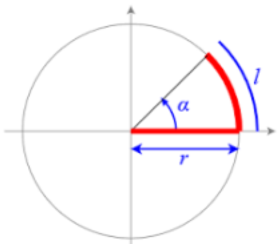
Le périmètre du cercle trigonométrique est égal à 2π

Représentation graphique:



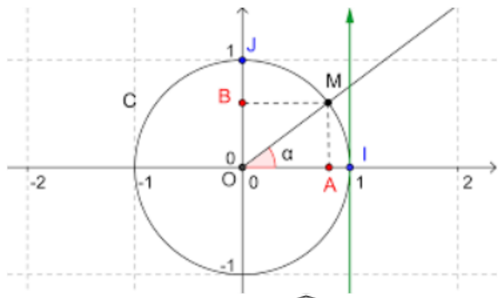
Propriétés:

1) La longueur l d'un arc de cercle intercepté par un angle α, exprimé en radians, est donné par: $l = R\ \alpha$



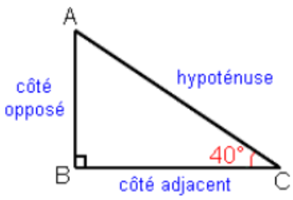
2) La mesure en radian d'un tour complet est de 2π radians.
La mesure en radian d'un $\frac{1}{2}$ tour complet est de π radians.
La mesure en radian d'un $\frac{1}{4}$ tour complet est de $\frac{\pi}{2}$ radians.

Exemple:



On appelle la longueur d'arc $\overset{\frown}{IM}$, la longueur de l'arc de cercle situé entre les points I et M : $l = 1 \times \alpha = \alpha$
La longueur d'arc $\overset{\frown}{IM}$ est proportionnelle à l'angle $\widehat{IOM}$

Rappels:



1) $Cos = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$
2) $Sin = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$
3) $Tan = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

$cos\,40° = \frac{BC}{AC}$; $sin\,40° = \frac{AB}{AC}$ et $tan\,40° = \frac{AB}{BC}$

Degré et Radians:

Degrés :	180	x
Radians :	π	$\frac{x\pi}{180}$

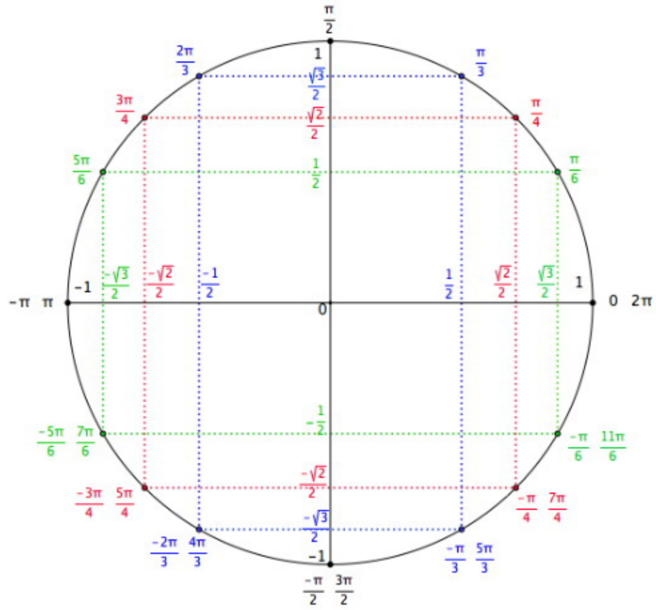
Exemples:
1) Mesure en degré: $30°$
Mesure en radians: $\alpha = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$
2) Mesure en radians: $\frac{5\pi}{4}$
Mesure en degrés:
$\beta = \frac{5\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = \frac{5 \times 180}{4} = 225°$

Cercle trigonométrique:

Valeurs remarquables:

Expression	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valeur en degrés	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Équivalent cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Équivalent sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Représration graphique:



Exemples:

Méthode:

On retranche $2\,k\,\pi$ au nombre $\frac{25\,\pi}{4}$ pour une valeur de k bien choisie afin d'obtenir un réel que l'on sait placer.

1) Placer l'image du réel $\frac{25\,\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique:

$$\frac{25\,\pi}{4} - 3\times(2\,\pi) = \frac{25\,\pi}{4} - 6\,\pi = \frac{25\,\pi}{4} - \frac{24\,\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Le réel $\frac{25\,\pi}{4}$ a la même image que $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique.

2) Placer l'image du réel $\frac{17\,\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique:

$$\frac{17\,\pi}{3} - 3\times(2\,\pi) = \frac{17\,\pi}{3} - 6\,\pi = \frac{17\,\pi}{3} - \frac{18\,\pi}{3} = \frac{-\pi}{3}$$

Le réel $\frac{17\,\pi}{3}$ a la même image que $\frac{-\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

3) Placer l'image du réel $\frac{7\,\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique:

$$\frac{7\,\pi}{6} = \frac{6\,\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$$

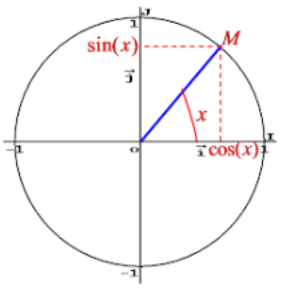
Les points associès à $\frac{7\,\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont diamétralement opposés sur le cercle trigonométrique.

Cosinus et Sinus d'un nombre réel:

Définition:

Le *cosinus* du nombre réel x est l'abscisse de M et on note $\cos\ x$

Le *sinus* du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note $\sin\ x$



Propriétés:

1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
2) $\cos\,(x + 2\,k\,\pi) = \cos\ x$
3) $\sin\,(x + 2\,k\,\pi) = \sin\ x$
4) $-1 \leqslant \cos\ x \leqslant 1$
5) $-1 \leqslant \sin\ x \leqslant 1$
6) À l'aide des relations précédentes, on déduit que :

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Exemple:

$x \in \left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\ \right]$ tel que $\sin\ x = 0{,}96$

Calculons $\cos\ x = ?$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \iff \cos^2 x = 1 - 0{,}96^2$

$\cos^2 x = 0{,}0784$

$x \in \left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\ \right]$ ce qui signifie que: $\cos\ x \geqslant 0$

Donc $\cos\ x = 0{,}28$

Définitions:

Périodicité:

Une fonction est dite périodique de période T si pour tout réel x, on a: $f(x + T) = f(x)$

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période $T = 2\,\pi$

$\cos\,(x + 2\,k\,\pi) = \cos\ x$ où $k \in Z$

$\sin\,(x + 2\,k\,\pi) = \sin\ x$ où $k \in Z$

Parité:

La fonction *cosinus* est paire car $\cos\,(-x) = \cos\,(x)$

La fonction *sinus* est impaire car $\sin\,(-x) = -\sin\,(x)$

Exemple:

Montrons que la fonction $f(x) = 2\,\sin\ x\ \cos\ x$ est impaire

On calcule:

$f(-x) = 2\,\sin\,(-x) \times \cos\,(x)$

$f(-x) = 2\,\sin\ x\ \cos\ x = -f(x)$

Donc la fonction f: $x \mapsto 2\,\sin\ x\ \cos\ x$ est impaire.

Interprétations graphiques:

1) La courbe représentative de la fonction Cosinus admet un axe de symétrie: c'est *l'axe des ordonnées* .

Tableau variations sur $I = [\,-\pi\ ;\ \pi\,]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\ x$	$1 \searrow$	0	$\searrow -1$

Grâce à la parité, la fonction cosinus est paire, on peut réduire l'intervalle I à l'intervalle $[\,0\ ;\ \pi\,]$ puis l'obtenir sur I grâce à la symétrie axiale, d'axe l'axe des ordonnées d'où:

x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\ x$	$-1 \nearrow$	0	$\nearrow 1 \searrow$	0	$\searrow -1$

2) La courbe représentative de la fonction Sinus admet un centre de symétrie: c'est le *centre du repère,* le point O de coordonnées $O\,(\,0\ ;\ 0\,)$.

Tableau variations sur $[\,-\pi\ ;\ \pi\,]$:

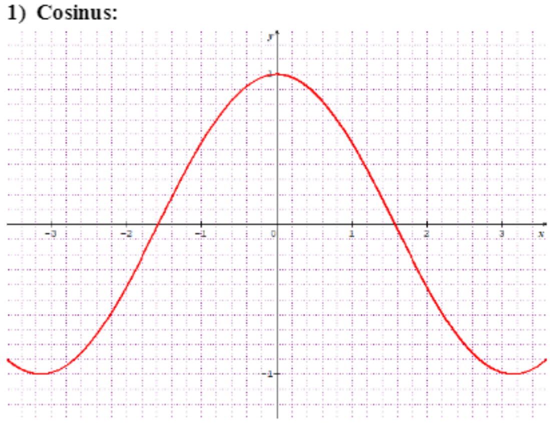
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\ x$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$

Grâce à la parité, la fonction sinus est impaire, on peut réduire l'intervalle I à l'intervalle $[\,0\ ;\ \pi\,]$ puis l'obtenir sur I grâce à la symétrie centrale, de centre $O\,(\,0\ ;\ 0\,)$ d'où:

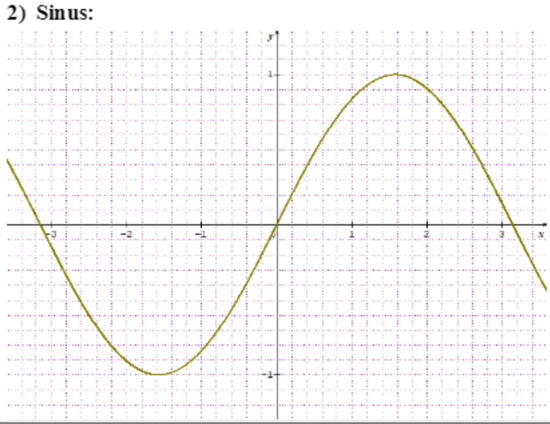
x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\ x$	$0 \searrow$	-1	$\nearrow 0 \nearrow$	1	$\searrow 0$

Représentations graphiques:

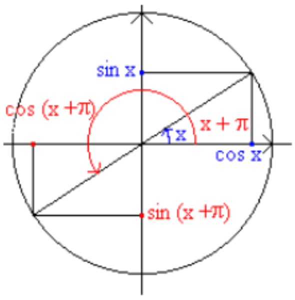
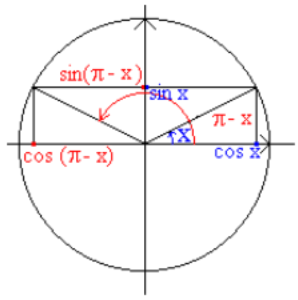
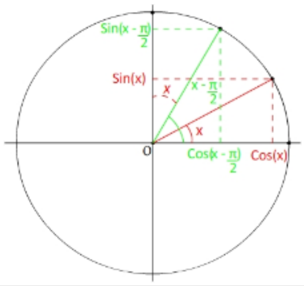
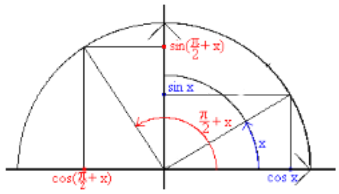
1) Cosinus:



2) Sinus:



Angles associés:

$\cos(x+\pi) = -\cos x$ $\sin(x+\pi) = -\sin x$		$\cos(\pi-x) = -\cos x$ $\sin(\pi-x) = \sin x$	
	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$		$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

Exemple 1:	*Exemple 2:*	*Exemple 3:*
$sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = ?$ $\frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ Les points associés à $\frac{5\pi}{3}$ et $\frac{-\pi}{3}$ ont la même image sur le cercle trigonométrique. Donc on a: $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ Car sinus est périodique de période $T = 2\pi$ De plus la fonction sinus est impaire: $\sin(-x) = -\sin(x)$ D'où $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ On sait que : $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Par conséquent: $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = ?$ $\frac{5\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$ Les points associés à $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont diamétralement opposés sur le cercle trigonométrique. Donc $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ On sait que: $\cos(x+\pi) = -\cos x$ D'où $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ De plus $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Par conséquent: $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	Montrons que la fonction $f(x) = 2\sin x \cos x$ est périodique de période $T = \pi$ On calcule: $f(x+\pi) = 2\sin(x+\pi) \times \cos(x+\pi)$ On sait que: $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ On peut donc écrire: $f(x+\pi) = 2(-\sin x)(-\cos x)$ $f(x+\pi) = 2\sin x \cos x$ (régle des signes) $f(x+\pi) = f(x)$ Donc la fonction f: $x \mapsto 2\sin x \cos x$ est périodique de période $T = \pi$.

Equations:

<table>
<tr><th>Définitions:</th><th>Exemples:</th></tr>
<tr><td>

Soit a un réel fixé

1) Les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ sont les réels de la forme:

$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

2) Les solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ sont les réels de la forme:

$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

</td><td>

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante:

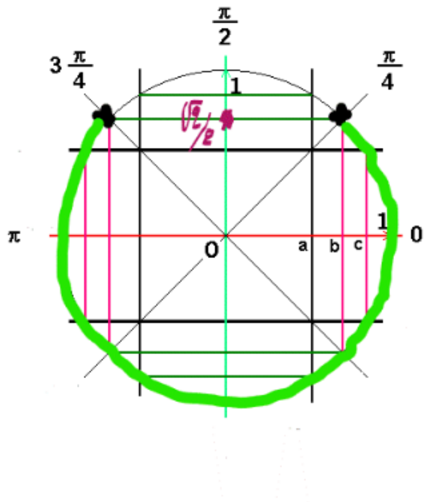
$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **or** $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **donc** $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Par lecture graphique , il y a deux points du cercle d'ordonnée $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Voir le graphique ci-dessous

Ce sont les points associés au réels $\frac{\pi}{4}$ **et** $\frac{3\pi}{4}$

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \; ; \; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\}$



2) Résoudre l'inéquation $\sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ **dans** $\left]-\pi \; ; \; \pi\right]$

A l'aide du graphique ci-dessus, on a :

$S = \left]-\pi \; ; \; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4} \; ; \; \pi\right]$

</td></tr>
</table>