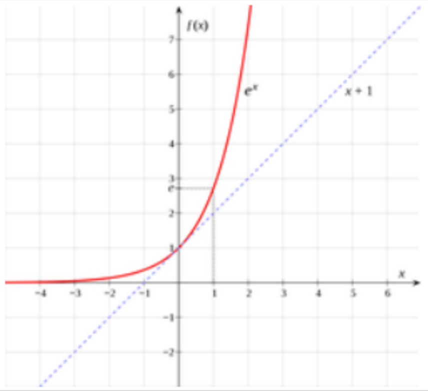
Fiche 5: Fonction Exponentielle

Définition:	*Propriétés:*	Exemples:
Il existe une unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée (soit $f'(x) = f(x)$) qui vaut 1 en 0 (soit $f(0) = 1$. **Cette fonction s'appelle fonction exponentielle, on la note "exp" et donc pour tout réel x, on a:** $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp 0 = 1$	1) $e^{x} \times e^{-x} = 1$ 2) $e^{x+y} = e^{x} \times e^{y}$ 3) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^{x}}$ 4) $e^{x-y} = e^{x} \times e^{-y} = \dfrac{e^{x}}{e^{y}}$ 5) $e^{nx} = \left(e^{x}\right)^{n}$ 6) $\sqrt{e^{x}} = \left(e^{x}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{x}{2}}$	1) $e^{-3x} = \dfrac{1}{e^{3x}} = \dfrac{1}{\left(e^{x}\right)^{3}}$ 2) $\dfrac{\left(e^{x}\right)^{2}}{e} = \dfrac{e^{2x}}{e} = e^{2x} \times e^{-1} = e^{2x-1}$

<table>
<tr><th>Propriétés:</th><th>Sens de variation:</th><th>Représentation graphique:</th></tr>
<tr>
<td>1) Valeurs remarquables:
$e^{0} = 1$ et $e^{1} \approx 2{,}718$.

2) La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $e^{x} > 0$

3) La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>exp'(x)</td><td></td><td>1</td><td>+</td><td>e</td><td></td></tr>
<tr><td>exp(x)</td><td>0</td><td>1</td><td>$\nearrow$</td><td>e</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Propriétés:	*Exemples:*
Quels que soient les réels x et y: 1) $e^{x} = e^{y} \Leftrightarrow x = y$ 2) $e^{x} \geqslant e^{y} \Leftrightarrow x \geqslant y$ 3) $e^{x} \leqslant e^{y} \Leftrightarrow x \leqslant y$ **Cas particulier:** 1) $e^{a} = 1 \Leftrightarrow a = 0$ (Car $1 = e^{0}$) 2) $e^{a} > 1 \Leftrightarrow a > 0$ (Car $1 = e^{0}$)	1) $e^{3x+2} = e^{4} \Leftrightarrow 3x + 2 = 4$ $\Leftrightarrow 3x = 4 - 2 \Leftrightarrow 3x = 2$ $\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ Donc $S = \left\{ \dfrac{2}{3} \right\}$ 2) $e^{4x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{4x+1} = 1 \Leftrightarrow e^{4x+1} = e^{0}$ $\Leftrightarrow 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{4}$ Donc $S = \left\{ \dfrac{-1}{4} \right\}$ 3) $e^{5x-6} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{5x-6} > 1 \Leftrightarrow e^{5x-6} > e^{0}$ $\Leftrightarrow 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow 5x > 6 \Leftrightarrow x > \dfrac{6}{5}$ Donc $S = \left] \dfrac{6}{5} \; ; +\infty \right[$ 4) $e^{x-5} < \dfrac{1}{e^{x-3}} \Leftrightarrow e^{x-5} < e^{-(x-3)}$ $\Leftrightarrow e^{x-5} < e^{3-x} \Leftrightarrow x - 5 < 3 - x$ $\Leftrightarrow x + x < 3 + 5 \Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < \dfrac{8}{2}$ $\Leftrightarrow x < 4$ Donc $S = \left] -\infty \; ; 4 \right[$

Fonction du type: $x \longmapsto e^{a\,x+b}$

Théorème:

Si $a\,x+b$ est une fonction dérivable sur un intervalle $\mathbb{R}$, alors la fonction $e^{a\,x+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et:

$$\left(e^{a\,x+b}\right)' = a \times e^{a\,x+b}$$

Propriété :

La fonction $x \longmapsto e^{k\,x}$, avec $k \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

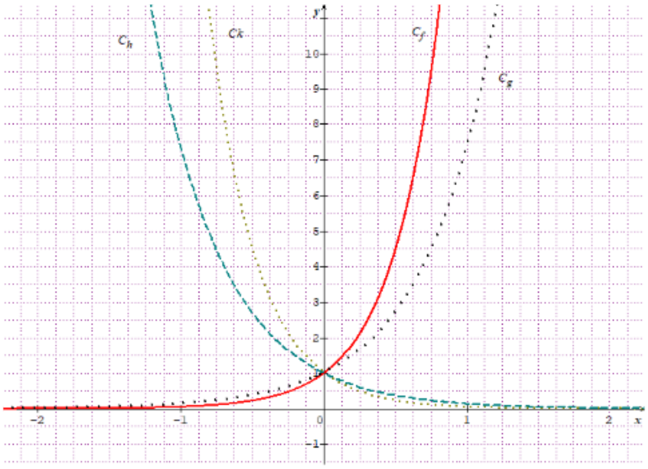
Sa dérivée est la fonction $x \longmapsto k\,e^{k\,x}$.

Si $k > 0$: la fonction $x \longmapsto e^{k\,x}$ est croissante.

Si $k < 0$: la fonction $x \longmapsto e^{k\,x}$ est décroissante.

Représentation graphique:

$f(x) = e^{3\,x}$; $g(x) = e^{2\,x}$; $h(x) = e^{-3\,x}$ et $k(x) = e^{-2\,x}$



Exemple:

Calculons la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

On pose:

$f'(x) = a \times e^{a\,x+b}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}x}$

Tangente au point d'abscisse $a = 0$:

$f'(0) = \dfrac{1}{2}\,e^{0} = \dfrac{1}{2}$ et $f(0) = e^{0} = 1$

$T : y = f'(0)\;(x-0) + f(0) = \dfrac{1}{2}\;(x-0)+1 = \dfrac{1}{2}\,x+1$

Considérons la fonction h définie sur R par:

$h(x) = e^{\frac{1}{2}x} - \dfrac{1}{2}\,x - 1$

On constate que: $h(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{2}\,x+1\right)$

Etudions les variations de h sur R :

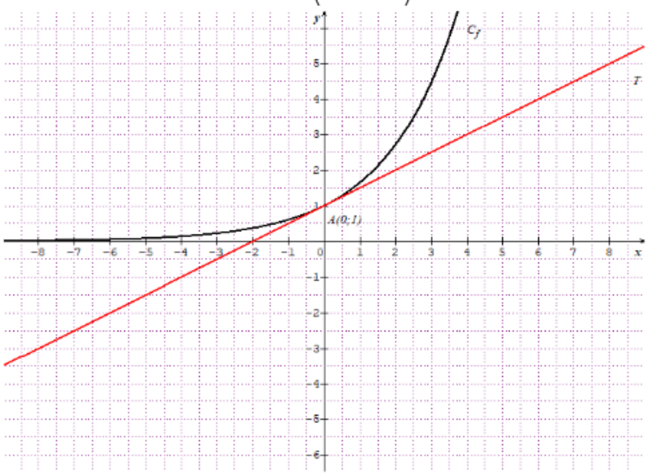
$h'(x) = \dfrac{1}{2}\,e^{\frac{1}{2}x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} - 1\right)$

$h'(x) = 0$ équivaut à $e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 1 = e^{0} \Leftrightarrow x = 0$

$h'(x) > 0$ équivaut à $e^{\frac{1}{2}x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} > e^{0} \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$\forall x \in \mathrm{R}$, $h(x) \geqslant 0$ ou $f(x) - \left(\dfrac{1}{2}\,x+1\right) \geqslant 0$



La courbe représentative de la fonction f est au-dessus de la tangente T

Lien entre exponentielle et suites géométriques:

Propriété:	*Exemples:*
Pour tout entier n, et tout réel a, on a : $e^{na} = \left(e^{a}\right)^{n}$ **:** **La suite** $\left(e^{na}\right)$ **est une suite géométrique de raison** e^{a} **.** *Rappel:* **Une suite géométrique de raison q et de premier terme** u_0 **a pour terme général :** $u_n = u_0 \times q^n$ **.**	**1) Soit la suite géométrique dont le terme général est:** $u_n = \frac{1}{3}\, e^{-4n}$ **Cherchons le premier terme et la raison:** $u_n = \frac{1}{3}\left(e^{-4}\right)^{n}$ **Donc la suite** $\left(u_n\right)$ **est une suite géométrique de premier terme** $u_0 = \frac{1}{3}$ **et de raison** $q = e^{-4}$ **2) Déterminons le terme général d'une suite géométrique de raison** $q = \frac{1}{e}$ **et de premier terme** $u_0 = 3$ $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times \left(\frac{1}{e}\right)^{n} = 3\, e^{-n}$ **Le terme général est:** $u_n = 3\, e^{-n}$