Fiche 2: Fonctions et Dérivation

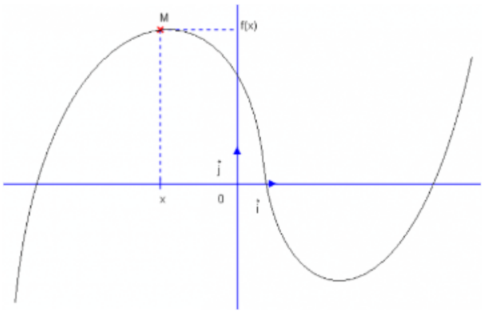
Fonctions

<table>
<tr><th>Définitions:</th></tr>
<tr><td>L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble D_f des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.

Exemples:
1) $f(x) = \sqrt{x}$, f est définie si $x \geqslant 0$ d'où $D_f = [0 ; +\infty[$
2) $g(x) = \dfrac{1}{x}$, g est définie si $x \neq 0$ d'où $D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
3) $h(x) = 2x - 1$, h est définie pour tous x réels d'où $D_f = \mathrm{R}$</td></tr>
</table>

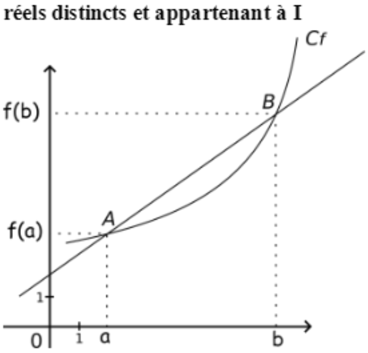
<table>
<tr><th>Définition:</th><th>Représentation graphique:</th></tr>
<tr><td>On considère une fonction f définie sur son ensemble de définition D_f .
Dans le plan muni d'un repère $\left(0 ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$, on appelle courbe représentative de la fonction f , notée C_f l'ensemble des points M de coordonnées $\left(x ; f(x)\right)$ pour tout $x \in D_f$.
Une équation de la courbe C_f est: $y = f(x)$

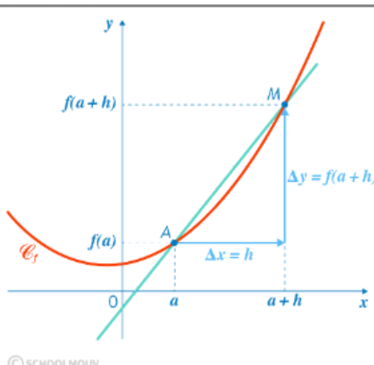
On dit que $f(x)$ est l'image de x par la fonction f ; x est l'antécédent de $f(x)$

A retenir:
1) Pour calculer l'image d'un élèment par une fonction f, on remplace x par sa valeur dans l'expression f(x).
2) Pour déterminer les antécédents d'un nombre λ par une fonction f, on résout $f(x) = \lambda$</td><td>

Exemples:
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^2 - x - 1$
• Trouver l'image de 2 revient à calculer:
$f(2) = 2^2 - 2 - 1 = 4 - 2 - 1 = 1$
• Trouver l'antécédent de (-1) revient à calculer $f(x) = -1$
$f(x) = x^2 - x - 1 = -1$ soit $x^2 - x = x(x-1) = 0$
$\begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$ Les antécédents de (-1) sont 0 et 1 .</td></tr>
</table>

Taux de variation et nombre dérivé :

<table>
<tr><th>Définition: taux de variation</th><th>Définitions: Nombre dérivé et tangente</th></tr>
<tr><td>Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux réels distincts et appartenant à I


Le quotient $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est appelé le taux de variation de f entre a et b.</td><td>

Dire que f est dérivable en a signifie que:
$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
tend vers un nombre réel lorque h tend vers 0, on écrit:
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$
On appelle $f'(a)$ le nombre dérivé
Géométriquement: $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f.
Equation de la tangente au point a d'abscisse a:
$y = f'(a)\ (x - a) + f(a)$</td></tr>
</table>

Exemple 1: Nombre dérivé	*Exemple 2: Tangente*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=x^2$ **Pour montrer que f est dérivable** $en\ a=2$, on **calcule:** $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ **, avec h un réel non nul.** $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}=\dfrac{4+4h+h^2-4}{h}=\dfrac{4h+h^2}{2}$ $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{h(4+h)}{h}=4+h$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(4+h)=4$ **La fonction est dérivable en** $a=2$ **et** $f'(2)=4$	**On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:** $f(x)=x^2$ **La tangente à la courbe** C_f **au point d'abscisse** $a=2$ **est:** $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ **On sait que** $f'(2)=4$ **(exemple 1)** **et** $f(2)=2^2=4$ $y=4(x-2)+4=4x-8+4$ $y=4x-4$ **L'équation de la tangente au point d'abscisse** $a=2$ **est:** $y=4x-4$

Dérivées usuelles:

Fonctions:	**Dérivées:**	**Domaine de définition de f :**	**Domaine de définition de f' :**
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	**R**	**R**
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	**R**	**R**
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	**R**	**R**
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	**R**	**R**
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$	$]-\infty\ ;0[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$	$]-\infty\ ;0[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0\ ;+\infty[$	$]0\ ;+\infty[$
$f(x)=mx+p$	$f'(x)=m$	**R**	**R**

Dérivées et opérations sur les fonctions:

Formules:

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I:

Fonctions :	*Dérivées:*	*Conditions:*
$k\,u(x)$, $k\in\mathbf{R}$	$k\,u'(x)$	
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$	
$u(x)\times v(x)$	$u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$	
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}$	$v(x)\neq 0$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$\dfrac{-u'(x)}{u^2(x)}$	$u(x)\neq 0$
$f(ax+b)$ **(a et b deux réels fixés)**	$a\times f'(ax+b)$	

Exemples:

1) $f(x)=x^2\sqrt{x}$ **sur** $]0\ ;+\infty[$

Forme $u\times v$ **avec** $u(x)=x^2$ **et** $v(x)=\sqrt{x}$

$u'(x)=2x$ **et** $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$

$f'(x)=2x\sqrt{x}+x^2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=\dfrac{2x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=\dfrac{5x^2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5x^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\ \sqrt{x}}=\dfrac{5x^2\sqrt{x}}{2x}$

$f'(x)=\dfrac{5x\sqrt{x}}{2}$

2) $g(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{2x+4}$ **sur** $]-\infty\ ;-2[$

Forme $\dfrac{u}{v}$ **avec**

$u(x)=x^2+3x-1$ **et** $v(x)=2x+4$

$u'(x)=2x+3$ **et** $v'(x)=2$

$g'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}$

$g'(x)=\dfrac{(2x+3)\times(2x+4)-\left(x^2+3x-1\right)\times 2}{(2x+4)^2}$

$g'(x)=\dfrac{2x^2+8x+14}{(2x+4)^2}$

Liens entre signe de la dérivée et variations:

f est une fonction dérivable sur un intervalle I:

Signe de la dérivée :	Sens de variation de f :
$\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$	f est croissante sur I
$\forall x \in I \quad f'(x) = 0$	f est constante sur I
$\forall x \in I \quad f'(x) \leqslant 0$	f est décroissante sur I

$\Leftrightarrow$

Lien entre dérivé et extrema:

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$

- Si f admet un extremum local alors $f'(a) = 0$

- Si $f'(a) = 0$ et la dérivée change de signe autour de a alors f admet un extremum local en a.

Méthode:

Comment repèrer les extrema locaux:
la dérivé s'annule en changeant de signe.

1) Maximum: la dérivée est positive puis négative;

2) Minimum: la dérivée est négative puis positive.

Tableau de variations d'une fonction:

Méthode:

1) Ensemble de définition et de dérivabilité puis on calcule $f'(x)$

2) Etude du signe de $f'(x)$

3) Déduire les variations de f et on note les résultats dans un tableau.

Exemple 1:

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;\,4]$ par : $f(x) = x^2 + x - 2$

Calcul de la dérivée:

$f'(x) = 2x + 1$

Etude du signe de la dérivée:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{2}$

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Tableau de variations:

x	-2		$-1/2$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-9/4$	$\nearrow$	18

La dérivée s'annule en changeant de signe en $\dfrac{-1}{2}$

Ainsi $\dfrac{-9}{4}$ est un minimum local de f.

Exemple 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par: $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x+2}$, la fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{(x-2)(x+2)+1}{(x+2)} = \dfrac{x^2-4+1}{(x+2)} = \dfrac{x^2-3}{(x+2)}$ **forme** $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ **et la dérivée est** $\dfrac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}$ **avec** $v(x) \neq 0$

$\begin{cases} u(x) = x^2 - 3 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$ **et** $\begin{cases} v(x) = x + 2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - 1\left(x^2-3\right)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2+3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

Cherchons le signe de la dérivée:

le dénominateur étant positif on en conclue que le signe de la dérivée dépend du signe du numérateur.

Factorisons le polynôme: $x^2 + 4x + 3$ avec $a = 1$, $b = 4$ et $c = 3$ d'où:

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times1\times3 = 16 - 12 = 4 = 2^2 > 0$

$x_1 = \dfrac{-4-2}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-4+2}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

D'où $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$

Signe du numérateur:

$a = 1 > 0$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
x^2+4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc la dérivée peut s'écrire:

$f'(x) = \dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$

Tableau de variations:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-6	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

$\begin{cases} f(-3) = -6 \\ f(-1) = -2 \end{cases}$

La fonction f admet un maximum local en -3 et un minimum local en -1