Fiche 1: Second degré

Définitions:

Toute fonction polynôme f de degré 2 sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ peut s'écrire sous la forme suivante:

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta \quad \text{où } \alpha=\frac{-b}{2a} \quad \text{et } \beta=f(\alpha)=f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

C'est la forme canonique.

Extremum de la fonction $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

1) $a>0$ alors f admet un minimum égal à β et atteint pour $x=\alpha$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	↗

f admet un minimum pour $x=\alpha=\frac{-b}{2a}$ et ce minimum est égal à $\beta=f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

2) $a<0$ alors f admet un maximum égal à β et atteint pour $x=\alpha$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	↘

f admet un maximum pour $x=\alpha=\frac{-b}{2a}$ et ce maximum est égal à $\beta=f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

Représentations graphiques:

Dans les calculs on peut être amener à utiliser une des trois formes suivantes:

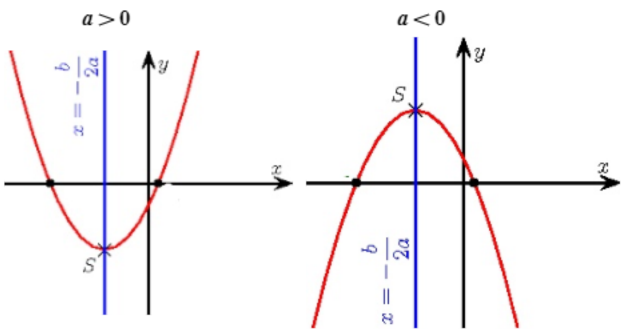
Forme développée: $f(x)=ax^2+bx+c$

Forme factorisée: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

Forme canonique: $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

La courbe repréesentative d'une fonction polynôme du second degré dans un repère orthonormé est appelée parabole ayant pour sommet $S(\alpha\ ,\beta)$

Cette parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ admet la droite $x=\alpha$ comme axe de symétrie, le sommet S appartient à cet axe



Exemple 1:

On donne $f(x)=2x^2+5x+3$

f est définie sur $\mathbb{R}$:

La forme canonique est:

Ne pas oublier de mettre 2 en facteur

$$f(x)=2\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right)$$

$$x^2+\frac{5}{2}x=\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}$$

$$f(x)=2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+\frac{3\times 8}{2\times 8}\right]=2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]$$

Donc la forme canonique est: $f(x)=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$

Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont:

$$f(x)=2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]$$

$$a^2-b^2=(a-b)\times(a+b)$$

$$f(x)=2\left(x+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)\times\left(x+\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$f(x)=2(x+1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

Un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul donc:

$$(x+1)\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$$

$$\begin{cases}x+1=0\\ \text{ou}\\ x+\frac{3}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ \text{ou}\\ x=\frac{-3}{2}\end{cases}\quad \text{donc } S=\left\{-\frac{3}{2}\ ;\ -1\right\}$$

Exemple 2:

On donne $f(x)=2x^2+5x+3$

f est définie sur $\mathbb{R}$:

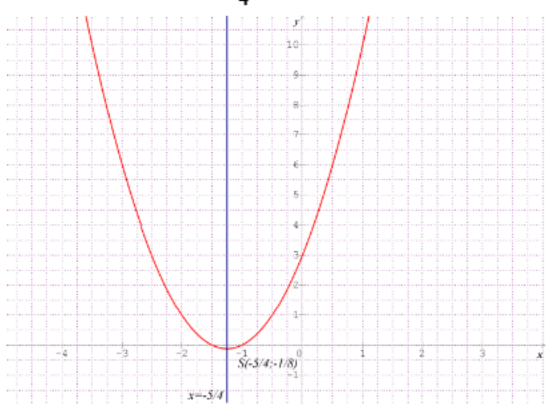
Tableau de variations: $a=2>0$

x	$-\infty$	$\frac{-5}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{-1}{8}$	↗

$$\alpha=\frac{-b}{2a}=-\frac{5}{4} \quad \text{et } \beta=f\left(\frac{-5}{4}\right)=2\left(\frac{-5}{4}\right)^2+5\left(\frac{5}{4}\right)+3=\frac{-1}{8}$$

Le sommet S a pour coordonnées: $S\left(-\frac{5}{4}\ ;\ \frac{-1}{8}\right)$

L'axe d'équation $x=-\frac{5}{4}$ est l'axe de symétrie de la parabole

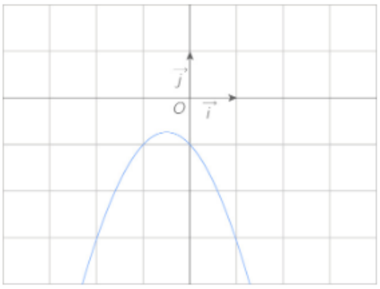
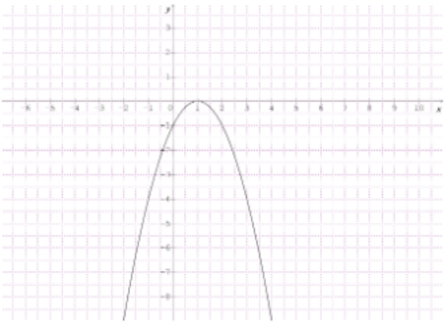
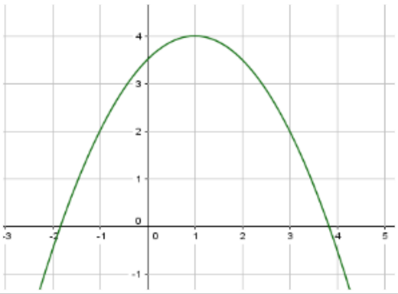
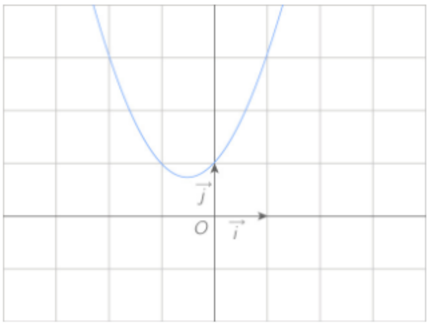
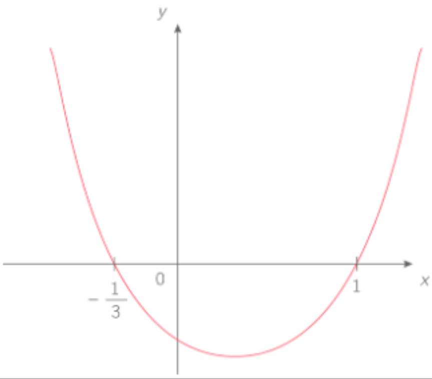


Equation du second degré: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

Δ est le discriminant associé à cette équation: **Signe de Δ :** $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$	**Solutions de l'équation :** $a\,x^2 + b\,x + c = 0$	**Factorisation de :** $a\,x^2 + b\,x + c$
$\Delta < 0$	**pas de solution**	**pas de factorisation**
$\Delta = 0$	**une solution double :** $x_0 = \frac{-b}{2\,a}$	$a\,x^2 + b\,x + c = a\left(x - x_0\right)^2$
$\Delta > 0$	**deux solutions réelles distinctes:** $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}$	$a\,x^2 + b\,x + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$ **De plus si x_1 et x_2 sont solutions de cette équation alors:** $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ **et** $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Exemple 1:	*Exemple 2:*	*Exemple 3:*
$2\,x^2 - 4\,x + 8 = 0$ **Avec** $a = 2$; $b = -4$ **et** $c = 8$ $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 8$ $\Delta = -80 < 0$ **Pas de solution** $S = \emptyset$	$2\,x^2 + 4\,x + 2 = 0$ **Avec** $a = 2$; $b = 4$ **et** $c = 2$ $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 0$ **Une solution:** $x_0 = \frac{-b}{2\,a} = -\frac{4}{2 \times 2} = \frac{-4}{4} = -1$ **Donc** $S = \{-1\}$ **Factorisation:** $2\,x^2 + 4\,x + 2 = 2\left(x - (-1)\right)^2$ $2\,x^2 + 4\,x + 2 = 2\,(x + 1)^2$	$x^2 - 4\,x + 3 = 0$ **Avec** $a = 1$; $b = -4$ **et** $c = 3$ $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = (-4)^2 - 4 \times 3 = 16 - 12 = 4$ **Deux solutions:** $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} = \frac{4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a} = \frac{4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$ **Donc** $S = \{1\ ;\ 3\}$ **Factorisation:** $x^2 - 4\,x + 3 = 1\,(x - 1) \times (x - 3)$

Signes d'une fonction polynôme du second degré:

<table>
<tr><td rowspan="3">$a<0$</td><td>$\Delta<0$</td><td></td><td>**La parabole est entièrement située en dessous de l'axe des abscisses**</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td></td><td>**La parabole est située en dessous de l'axe des abscisses et possède un point d'intersection d'abscisse x_0**</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$ 0 $-$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\Delta>0$</td><td></td><td>**La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points distincts d'abscisses x_1 et x_2**</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$ 0 $+$ 0 $-$</td></tr></table>*Le signe de a à l'extérieur des racines ; le signe de (-a) à l'intérieur*</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a>0$</td><td>$\Delta<0$</td><td></td><td>**La parabole est entièrement située au dessus de l'axe des abscisses**</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td></td><td>**La parabole est située au dessus de l'axe des abscisses et possède un point d'intersection d'abscisse x_0**</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$ 0 $+$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\Delta>0$</td><td></td><td>**La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points distincts d'abscisses x_1 et x_2**</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$ 0 $-$ 0 $+$</td></tr></table>*Le signe de a à l'extérieur des racines ; le signe de (-a) à l'intérieur*</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Exemple 1:</th><th>Exemple 2:</th><th>Exemple 3:</th></tr>
<tr>
<td>$2x^2 - 4x + 8 = 0$
$a = 2 > 0$
Pas de solution $S = \emptyset$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">$+$</td></tr>
</table></td>
<td>$2x^2 + 4x + 2 = 0$
$a = 2 > 0$
On sait que $S = \{-1\}$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table></td>
<td>$x^2 - 4x + 3 = 0$
$a = 1 > 0$
On sait que $S = \{1 ; 3\}$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>1</td><td></td><td>3</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>