Exercice II :

1) tableau variation :

x	0		$x_1 \approx 0{,}5$		$x_2 \approx 5{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	-2

· $f'(x) = 0$ a deux solutions
réponse b

2) Sur $[5{,}5 ; 10]$ la fonction f est décroissante

Donc $f'(7) < 0$.
réponse c

3) * $[4 ; 5{,}5]$ f est croissante

Les tangentes ont des coefficients directeurs positifs mais de + en + petits, puis égal à 0 pour $x = 5{,}5$

* $[5{,}5 ; 7]$ f est décroissante

les tangentes ont des coefficients directeurs négatifs de + en + petits.

cd f' est décroissante sur $[4 ; 7]$

4) $f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x}$

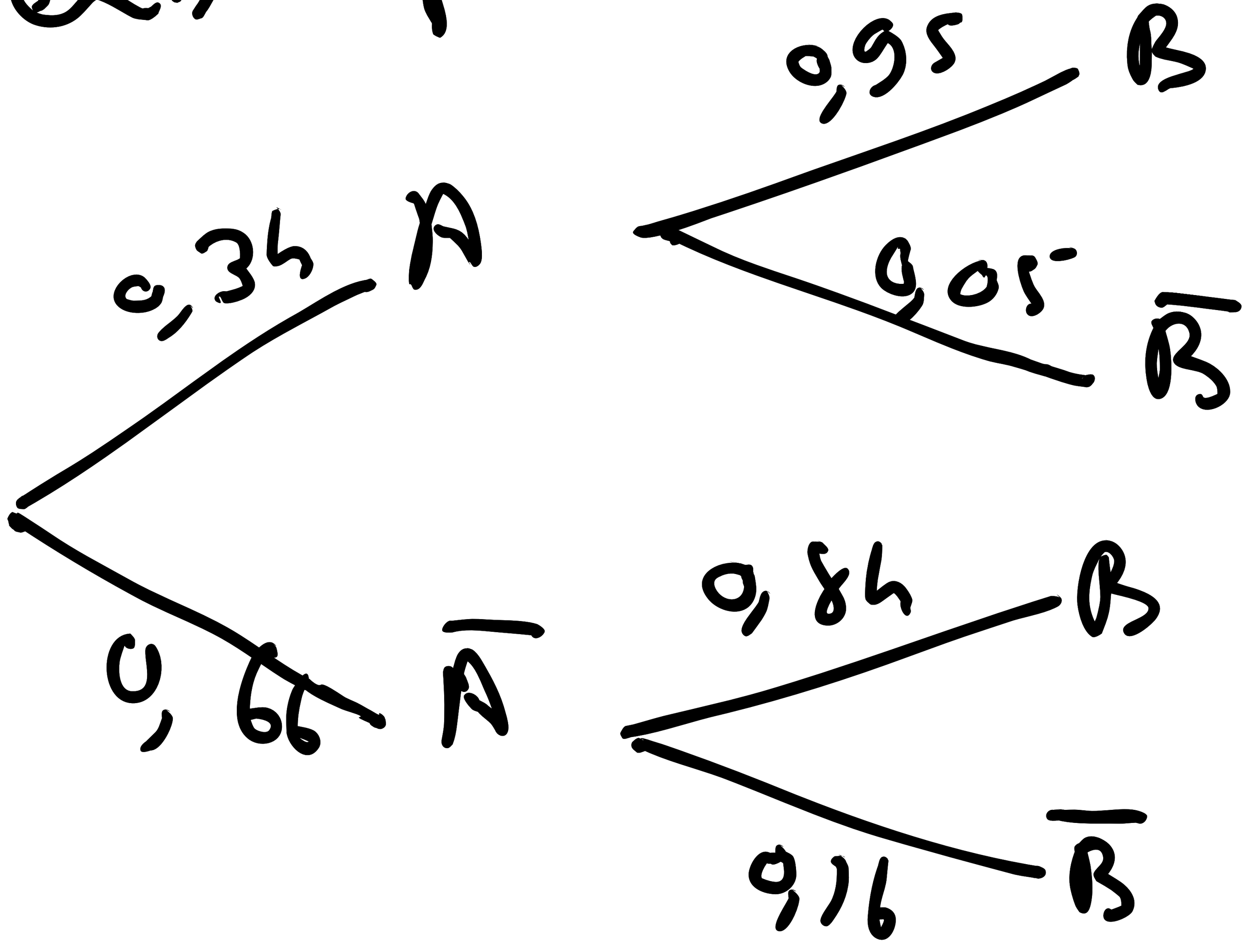
$f''(x) = 0 \iff 2 - x = 0 \iff x = 2$

La courbe admet sur $[0 ; 10]$ un point d'inflexion d'abscisse $x = 2$

Exercice II :

Partie A :

1) arbre pondéré



2) a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B}) = 0,34 \times 0,05$

$P(A \cap \overline{B}) = 0,017$

b) Probabilités totales :

$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$= P(A) \times P_A(\overline{B}) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$

$= 0,34 \times 0,05 + 0,66 \times 0,16$

$\underline{P(\overline{B}) = 0,1226}$ $\underline{P(\overline{B}) \approx 0,123}$

c) $P_{\overline{B}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,017}{0,123}$

$P_{\overline{B}}(A) \simeq 0,138$

La probabilité qu'un coureur termine la course en moins de 234 minutes sachant qu'il a plus de 60 ans est d'environ <u>13,8 %</u>

Partie B :

1) Calculatrice

$$P(210 \leq T \leq 270) \approx 0{,}543$$

2) $P_{(210 \leq T \leq 270)}(T \leq 240)$

$$= P(210 \leq T \leq 240)$$

$$P(210 \leq T \leq 240) \approx \underline{0{,}453}$$

3) a) $P(T \leq 300) = \frac{1}{2} + P(250 \leq T \leq 300)$

$$P(T \leq 300) \approx 0{,}9$$

b) $P(T \geq t) = 0{,}9 \Leftrightarrow P(T \leq t) = 0{,}1$

calculatrice : $\underline{t \approx 200}$

c) 90% des coureurs ont couru le marathon en plus de $\underline{200}$ minutes

Exercice III :

1) $u_1 = 0,8 \times 150 + 45$

$u_1 = \underline{165}$

$u_2 = 0,8 \times u_1 + 45$

$= 0,8 \times 165 + 45$

$u_2 = \underline{177}$

2) a) Algorithme ② est le bon
⚠ (permet de calculer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 220$)

b) $u_{12} \approx 219,846$
$u_{13} \approx 220,877$

Donc l'algorithme affiche $\underline{13}$

3) a) $v_n = u_n - 225$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 225 = 0,8 \times u_n + 45 - 225$

$v_{n+1} = 0,8\, u_n - 180$

$v_{n+1} = 0,8\,(u_n - 225) = 0,8\, v_n$

v_n est 1 suite géométrique de raison
$q = 0,8$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 225 = 150 - 225 = -75$

b) $v_n = v_0 \times q^n = -75 \times 0,8^n$

$u_n = v_n + 225$ donc $\underline{u_n = 225 - 75 \times 0,8^n}$

4) w_n = nombre de participants en $2015+n$

20% ne reviennent pas et 45 nouveaux

↳ Donc 80% reviennent

D'où $w_{n+1} = 0{,}80\, w_n + 45$

$w_n \geqslant 250$

$\Leftrightarrow u_n \geqslant 250$ (car $(u_n) = (w_n)$)

$\Leftrightarrow 225 - 75 \times 0{,}8^n \geqslant 250$

$\Leftrightarrow -75 \times 0{,}8^n \geqslant 250 - 225 = 25$

$\Leftrightarrow 0{,}8^n \leqslant \frac{-25}{75} = -\frac{1}{3}$

Impossible car $0{,}8^n > 0$

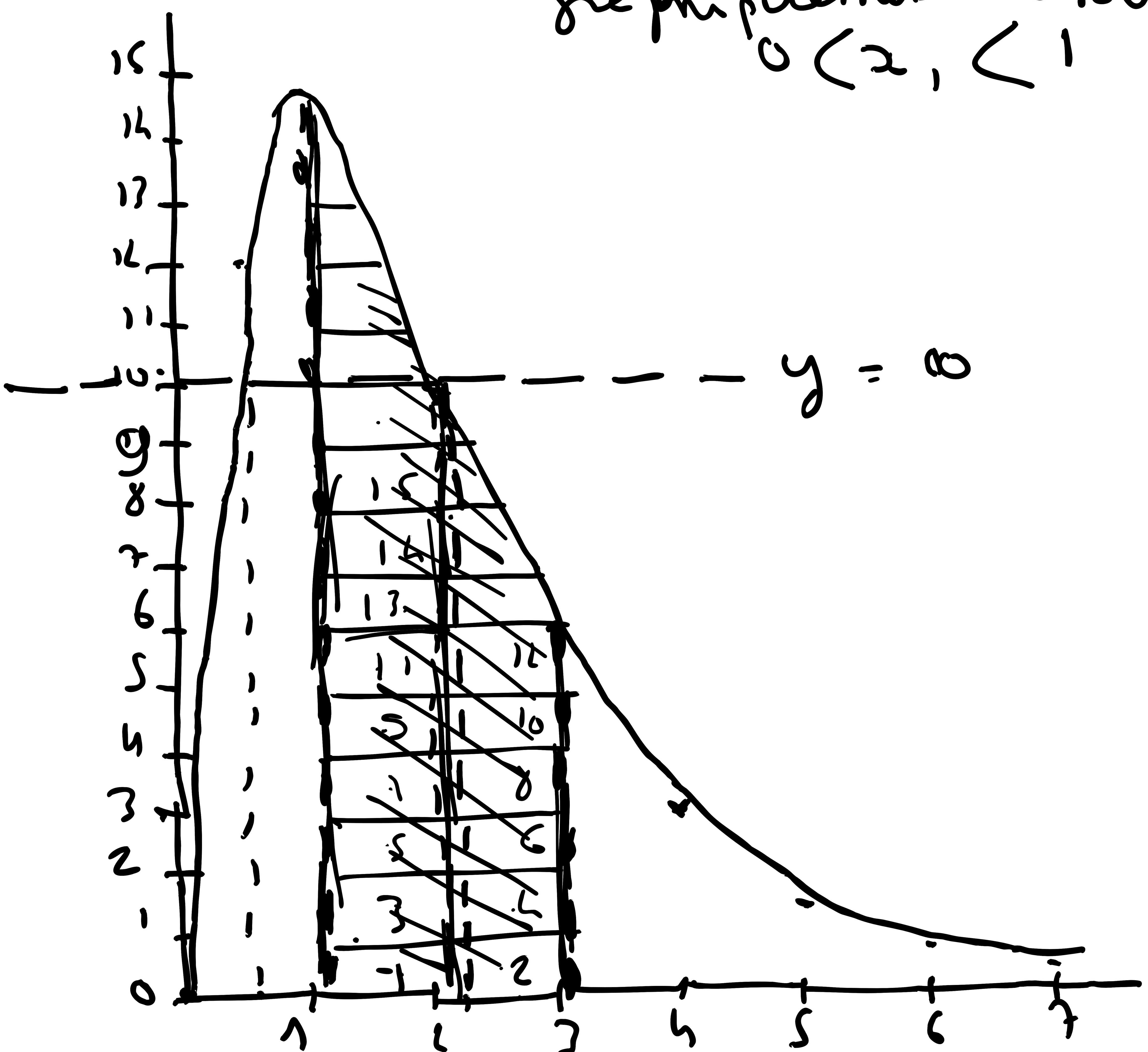
ccl : Donc, ils n'auront pas à refuser de inscription dans les années à venir car le nombre de participants ne dépassera pas 250.

Exercice IV :

Partie A :

1) $f(x) = 10$

graphiquement 2 solutions $0 < x_1 < 1$ et $2 < x_2 < 3$.



2) le maximum est atteint pour $\underline{x = 1}$ et vaut 14,8

3) $\int_1^3 f(x)\,dx$ = aire comprise entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$, la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.

réponse b. $[18, 26]$

Partie B :

1) $x \in [0, 7]$

$f(x) = 2x\, e^{-x+3}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$u = 2x \to u' = 2$
$v = e^{-x+3} \to v' = -e^{-x+3}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$f'(x) = 2e^{-x+3} - 2x\, e^{-x+3} = e^{-x+3}(2 - 2x)$

$= 2e^{-x+3}(1 - x)$

2) a) le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(1-x)$ (car $2e^{-x+3} > 0$).

x	0	α	1	β	7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0 ↗	10 ↗	$2e^2$ (>10)	↘ 10	↘ $14e^{-4}$

$f(0) = 0$

$f(1) = 2 \times 1 \times e^{-1+3} = 2e^2$

$f(7) = 2 \times 7 \times e^{-7+3} = 14e^{-4}$.

b) la fonction f est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1; 7]$.

f admet 1 maximum, il est atteint pour $x = 1$ et vaut $2e^2$ ($\simeq 14{,}8$)

3) sur $[0, 1]$ f est continue et strictement croissante, $10 \in [0, 2e^2]$, donc d'après le corollaire TVI il existe un unique $\alpha \in [0; 1]$ tel que $f(\alpha) = 10$

Sur $[1;7]$ f continue et strictement décroissante
$10 \in [14e^{-4} ; 2e^{2}]$, donc d'après le corollaire du TVI, il existe un unique $\beta \in [1,7]$ tel que $f(\beta) = 10$.

b) $\alpha \approx 0,36$ à 10^{-2} près.

Calculatrice :

$f(2,16) \simeq 10,007 > 10$

$f(2,17) \simeq 9,953 < 10$

donc $2,16 < \beta < 2,17$

4) a) $F(x) = (-2x-2)e^{-x+3}$

F est dérivable sur $[0,7]$ $\quad (uv)' = u'v + uv'$

$u = -2x - 2$
$u' = -2$
$v = e^{-x+3}$
$v' = -e^{-x+3}$

$F'(x) = -2e^{-x+3} - (-2x-2)e^{-x+3}$

$F'(x) = \cancel{-2e^{-x+3}} + 2x e^{-x+3} \cancel{+2e^{-x+3}}$

$F'(x) = 2x e^{-x+3} = f(x)$

F est une primitive de f sur l'intervalle $[0,7]$.

b) $\int_1^3 f(x)\,dx = [F(x)]_1^3 = [F(3) - F(1)]$

$= [-8e^0 + 4e^2]$

$\int_1^3 f(x)\,dx = \underline{4e^2 - 8}$

5) a) $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$$\mu = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\times(4e^2 - 8)$$

$$\underline{\mu = 2e^2 - 4} \quad (\underline{\approx 10{,}8})$$

La valeur moyenne du bénéfice lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets est de <u>10800</u> euros

b) $f(x) > 10 \Leftrightarrow x \in [\alpha, \beta]$

$\alpha \approx 0{,}36$ $\quad (f(\alpha) > 10)$
$\beta \approx 2{,}16$ $\quad (f(\beta) > 10)$

<u>ccl</u> : l'entreprise doit vendre entre 36 et 216 objets pour que son bénéfice soit supérieur à 10.000 euros.