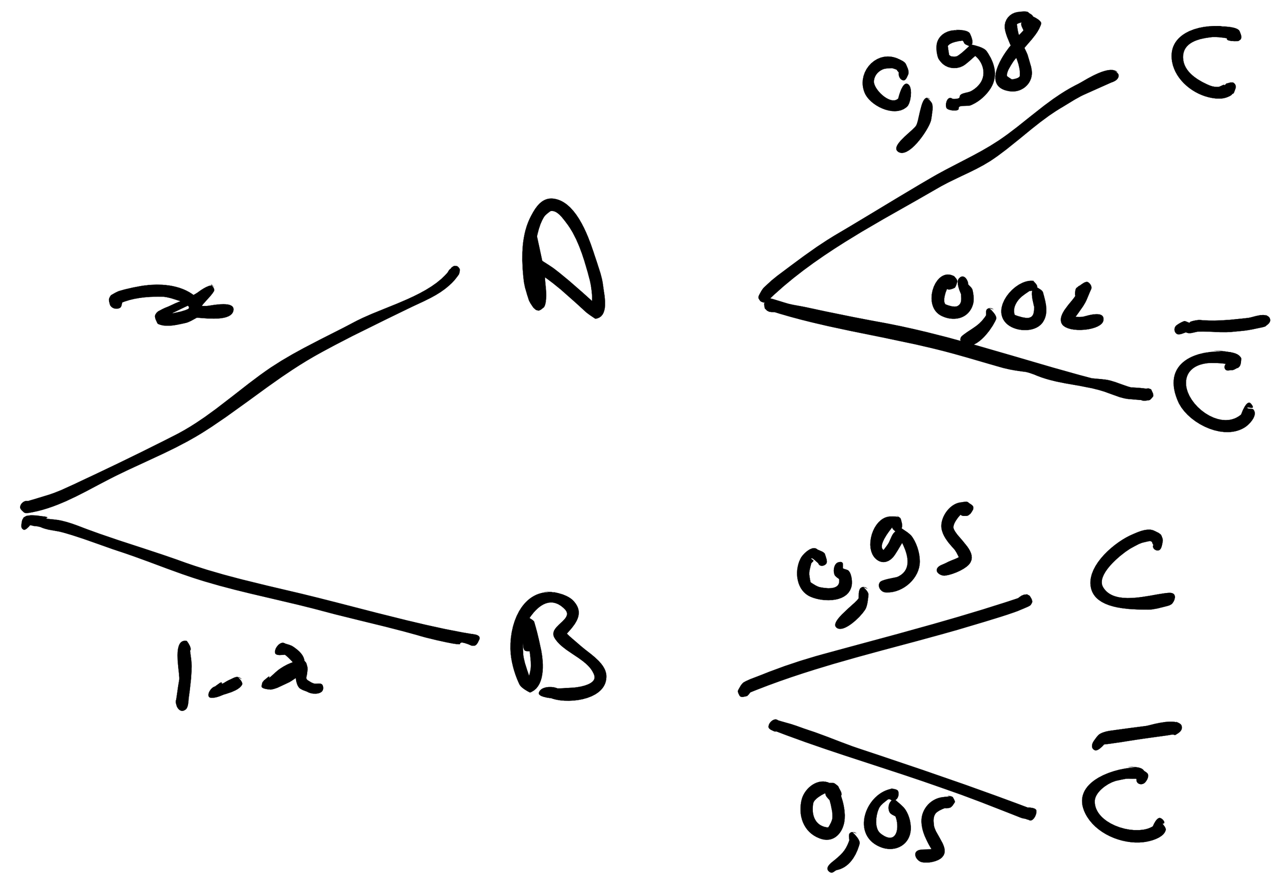
Exercice 8

Partie A :

1) On prélève au hasard une tablette et :

A : " tablette provient chaîne A "
C : " tablette commercialisable ".

$P(A) = x$ donc $P(B) = 1 - P(A) = 1 - x$



Probabilités totales :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C)$$

$$= 0,98x + (1-x) \times 0,95$$

$$= 0,98x + 0,95 - 0,95x$$

$$\underline{P(C) = 0,03x + 0,95}$$

2) 96% des tablettes sont commercialisables :
Calculons x :

$$P(C) = 0,03x + 0,95 = 0,96$$
$$\Leftrightarrow 0,03x = 0,96 - 0,95$$
$$\Leftrightarrow 0,03x = 0,01$$
$$\Leftrightarrow x = 0,01/0,03 = \frac{1/100}{3/100} = \frac{1}{3}$$

Donc $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ soit $\underline{P(B) = 2P(A)}$

Partie B :

1) L'espérance d'une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle ~~de~~ de paramètre λ est :

$$E(Z) = \frac{1}{\lambda}.$$

Or $E(Z) = 5$ donc $\frac{1}{\lambda} = 5$ soit $\lambda = \frac{1}{5} = 0,2$

2) $P(Z > 2) = e^{-\lambda \times 2} = e^{-0,2 \times 2}$

$$P(Z > 2) = e^{-0,4} \approx 0,67$$

3) $P_{Z \geq 3}(Z \geq 5) = P_{Z \geq 3}(Z \geq 3 + 2)$

$$= P(Z \geq 2)$$

Donc $P_{Z \geq 3}(Z \geq 5) = e^{-0,4} \approx 0,67$

Partie C :

1) Calculatrice : $P(83 \leq X \leq 87) \approx 0,683$.

La probabilité que la teneur en cacao soit différente de + de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage est :

$$p = 1 - P(83 \leq X \leq 87) \approx 0,317$$

$\underline{p = 0,317}$

2) $P(85 - a \leq X \leq 85 + a) = 0{,}9$

$Z = \dfrac{X - 85}{2}$ suit la loi normale centrée réduite :

$$P\left(\frac{85 - a - 85}{2} \leq \frac{X - 85}{2} \leq \frac{85 + a - 85}{2}\right)$$

$$= P\left(\frac{-a}{2} \leq \frac{X - a}{2} \leq \frac{a}{2}\right) = P\left(\frac{-a}{2} \leq Z \leq \frac{a}{2}\right)$$

Donc $P\left(-\frac{a}{2} \leq Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0{,}9$

$\Leftrightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) - 1 = 0{,}9$

$\Leftrightarrow 2P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0{,}9 + 1 = 1{,}9$

$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{1{,}9}{2} = 0{,}95$

Calculatrice : $\frac{a}{2} \approx 1{,}645$

$\underline{a \approx 3{,}29}$

Conclusion : 90% des tablettes commercialisables ont 1 teneur en cacao comprise entre : 81,71% et 88,29%

3) $n = 10.000 \geq 30$, $p = 0{,}9$

$np = 9000 \geq 5$ et $n(1-p) = 1000 \geq 5$:

Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil d 9

$$I_{10.000} = \left[p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0{,}89412 ; 0{,}90588]$$

$f = \dfrac{550 - 80}{550} \approx 0{,}855$ or $0{,}855 \notin I$

Ccl : on peut donc remettre en cause
l'affirmation du responsable achat

Exercice 2 :

1) a) $z^2 - 6z + c = 0$

$a = 1$; $b = -6$ et $c = c$ (avec $\underline{c > 9}$)

$D = b^2 - 4ac = 36 - 4c = 4(9 - c)$

Car $c > 9$ donc $9 - c < 0$

$D = 4(9 - c) < 0$

l'équation admet 2 solutions complexes conjuguées.

b) $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-D}}{2a} = \dfrac{6 - i\sqrt{-4(9-c)}}{2}$

$z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-D}}{2a} = \dfrac{6 + i\sqrt{-4(9-c)}}{2}$

$z_1 = \dfrac{6 - 2i\sqrt{c-9}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{6 + 2i\sqrt{c-9}}{2}$

$z_1 = 3 - i\sqrt{c-9}$ et $z_2 = \overline{z_1} = 3 + i\sqrt{c-9}$

2) $OA = |z_A - z_O| = |z_A| = \sqrt{9 + c - 9} = \sqrt{c}$

$OB = |z_B - z_O| = |z_B| = \sqrt{9 + c - 9} = \sqrt{c}$

Le triangle OAB est donc isocèle en O.

3) $AB = |z_B - z_A| = |2i\sqrt{c-9}| = 2\sqrt{c-9}$

Le triangle est rectangle en O, d'après Pythagore

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

$$\Leftrightarrow 4(c-9) = c + c$$

$$\Leftrightarrow 4(c-9) = 2c$$

$$\Leftrightarrow 2(c-9) = c$$

$$\Leftrightarrow 2c - 18 = c$$

$$\Leftrightarrow \underline{c = 18}$$

Il existe une seule valeur du réel c ($= 18$) telle que le triangle OAB soit rectangle

Exercice III :

Partie A : Etude de la fonction f

1) $f(x) = \ln(-2x^2 + 13,5)$ $\quad x \in [-2,5 ; 2,5]$

Mq : $-2x^2 + 13,5 > 0$

$u(x) = -2x^2 + 13,5$ polynôme de degré 2
u est dérivable sur $[-2,5 ; 2,5]$

$u'(x) = -4x$

x	$-2,5$		0		$+2,5$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	1	$\nearrow$	$13,5$	$\searrow$	1

$u(-2,5) = 1$

$u(2,5) = 1$

pour tout $x \in [-2,5 ; 2,5]$ on a $u(x) \geq 1 > 0$.

(Rappel : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$)

$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-4x}{2x^2+13,5}$

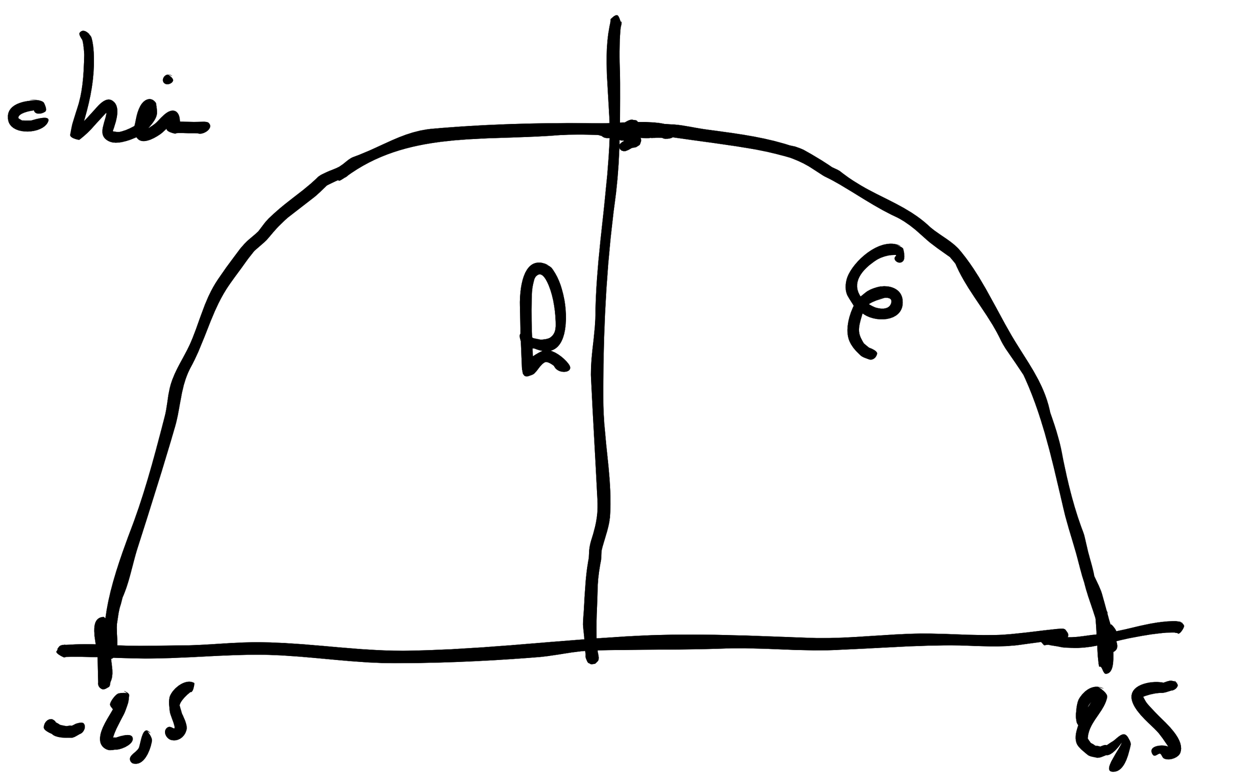
	$-2,5$		0		$2,5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\ln 1 = 0$	$\nearrow$	$\ln 13,5$	$\searrow$	$\ln 1 = 0$

Partie B : Aire zone creusement.

1) hauteur h

D'après le tableau de variation

la valeur est maximale pour $x = 0$ et vaut $\ln 13,5$



$h = \ln 13,5 \simeq 2,6$

Or $2,6 \neq R \ (= 2,5)$

La courbe $\mathcal{C}$ n'est pas un arc de cercle de centre O

2) Axe des ordonnées est un axe de symétrie

$$\mathcal{A} = \int_{-2,5}^{2,5} f(x)\,dx = 2\int_0^{2,5} f(x)\,dx$$

$$⚠ \begin{cases} \int_{-2,5}^{0} f(x)\,dx = \int_0^{2,5} f(x)\,dx \text{ et} \\ \int_{-2,5}^{2,5} f(x)\,dx = \int_{-2,5}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{2,5} f(x)\,dx \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \int_{-2,5}^{2,5} f(x)\,dx = 2\int_0^{2,5} f(x)\,dx \quad \text{en unité d'aire}$$

échelle : $1\,ua = 2 \times 2\ m^2$.
en unité 2 m

$$\mathcal{A} = 2\int_0^{2,5} f(x)\,dx \times 4\ m^2$$

$$\mathcal{A} = 8\int_0^{2,5} f(x)\,dx\ \ m^2$$

3) a)

	R	S
Étape 1 :	0,130116	0,130116
— 4	0,129837	0,519981
— 50	0	5,197538

Afficher $S = 5,197538$

b) Une valeur approchée de :

$$\int_0^{2,5} f(x)\,dx \text{ est } 5,197538$$

Valeur approchée de la zone de creusement est :

$$A \approx 8 \times 5,197538$$

$$A \approx 41,580 \text{ m}^2$$

ccl : Au mètre carré près, l'aire de creusement est 42 m²

Exercice IV :

Partie A : conjectures

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - n + 3 & u_0 = 1 \\ v_n = 2^n & v_0 = 2^0 = 1 \end{cases}$$

1) cellules B3 : ?

B3 = 2 x B2 - A2 + 3

cellule C2 : !

C3 = 2^A3

2) Conjectures :

* $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$

* $\frac{3080}{1024} \approx 3{,}0078$ $\qquad$ $\frac{12298}{4096} \approx 3{,}0024$

$\frac{6153}{2048} \approx 3{,}0044$ $\qquad$ $\frac{24\,587}{8192} \approx 3{,}0013$

$$\lim_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3.$$

Partie B : Suite (u_n)

1) $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$

Initialisation : $u_0 = 3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$
vrai

Hérédité : $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$
Montrons que $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + (n+1) - 2$?
$= 3 \times 2^{n+1} + n - 1$?

$u_{n+1} = 2u_n - n + 3$

$= 2 \times (3 \times 2^n + n - 2) - n + 3$

$= 3 \times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3$

$= 3 \times 2^{n+1} + n - 1 = 3 \times 2^{n+1} + (n+1) - 2$
vrai

CCL : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$

2) $\lim_{+\infty} u_n = ?$ $\quad \lim_{+\infty} 2^n = +\infty$ $(q = 2 > 1)$

$\lim_{+\infty} n = +\infty$

Donc $\lim_{+\infty} u_n = +\infty$

3) $u_n \geqslant 1000.000$

$3 \times 2^n + n - 2 \geqslant 1.000.000$

$3 \times 2^n + n \geqslant 1\,000\,002$

Calculatrice
$f(x) = 3 \times 2^x + x$ puis la table nous donne :
$n = 19$ $\quad$ ($u_{18} < 1000000$ et $u_{19} > 1000000$)

Partie C : suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1) on pose $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n}$$

$$= \frac{2u_n - n + 3}{2^{n+1}} - \frac{u_n}{2^n}$$

$$= \frac{2u_n - n + 3}{2^{n+1}} - \frac{2u_n}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{3 - n}{2^{n+1}}$$

$n \geqslant 3$ alors $3 - n \leqslant 0$

Donc $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$, la suite w_n est décroissante.

2) $\frac{u_n}{v_n} = \frac{3 \times 2^n + n - 2}{2^n} = 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n}$

$$= 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

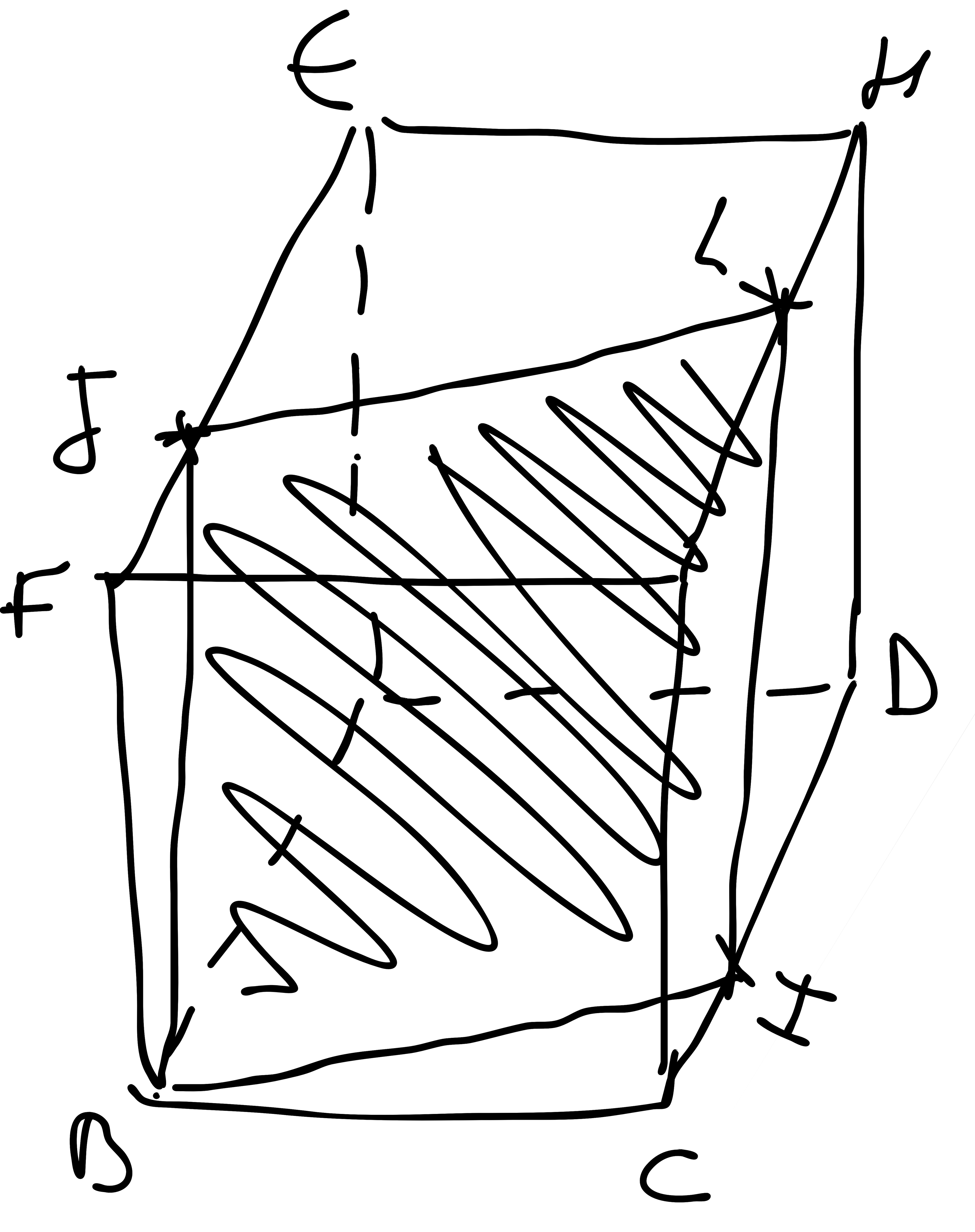
* $\lim\limits_{+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ (théorème des gendarmes)
$\left(0 < \frac{n}{2^n} < \frac{1}{n}, \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n} = 0\right)$
* $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

cl : $\lim\limits_{+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3$.

Exercice IV :

Cube ABCDEFGH   repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$\mathcal{P}$: plan équation : $x + \frac{1}{2} y + \frac{1}{3} z - 1 = 0$



Trouver des points appartenant au plan $\mathcal{P}$

* $B \in \mathcal{P}$ $B(1, 0, 0)$

$\left(1 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 - 1 = 0\right)$

* $I\left(\frac{1}{2} ; 1, 0\right)$

$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 - 1 = 0\right)$

$I \in \mathcal{P}$

* $J\left(\frac{2}{3} ; 0 ; 1\right)$

$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{3} - 1 = 0\right)$

$J \in \mathcal{P}$.

Le plan $\mathcal{P}$ et (BIJ) sont confondus

Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles

On trace la parallèle à (BI) passant par J

On note L le point d'intersection de cette droite avec (GH).