Exercice I.

$$f(x) = x e^{-x}$$

Partie A :

1) $f(0) = 0$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = ?$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$

f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ (produit de fonctions dérivables)

$u = x \qquad u' = 1$

$v = e^{-x} \qquad v' = -e^{-x}$

$f'(x) = 1e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$e^{-x} > 0$ donc signe de $f'(x)$ = signe de $(1-x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$1 - x > 0$

$1 > x$

$f(1) = 1e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

2) F est dérivable sur $[0;+\infty[$

$F(x) = (-x-1)e^{-x}$

$F'(x) = -1e^{-x} - (-x-1)e^{-x}$

$= -e^{-x} + (x+1)e^{-x}$

$= e^{-x}(-1+x+1) = xe^{-x}$

$= f(x)$

$F'(x) = f(x)$

F est une primitive de la fonction f sur $[0;+\infty[$

Partie B :

1) $f(x) - y = f(x) - ax = 0$

$xe^{-x} - ax = 0$

$x(e^{-x} - a) = 0$

Donc $\begin{cases} \text{soit } x = 0 \\ \text{soit } e^{-x} = a \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\ln a \end{cases}$

C_f et D_a ont un point d'intersection distinct de l'origine dont l'abscisse est :

$x = -\ln a$.

2) Aire entre la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite d'équation $y = ax$ et la droite d'équation $x = 0$ et $x = -\ln a$

$$H_a = \int_0^{-\ln a} f(x) - ax \, dx$$

$$= \int_0^{-\ln a} x e^{-x} - ax \, dx = \left[F(x) - a\frac{x^2}{2} \right]_0^{-\ln a}$$

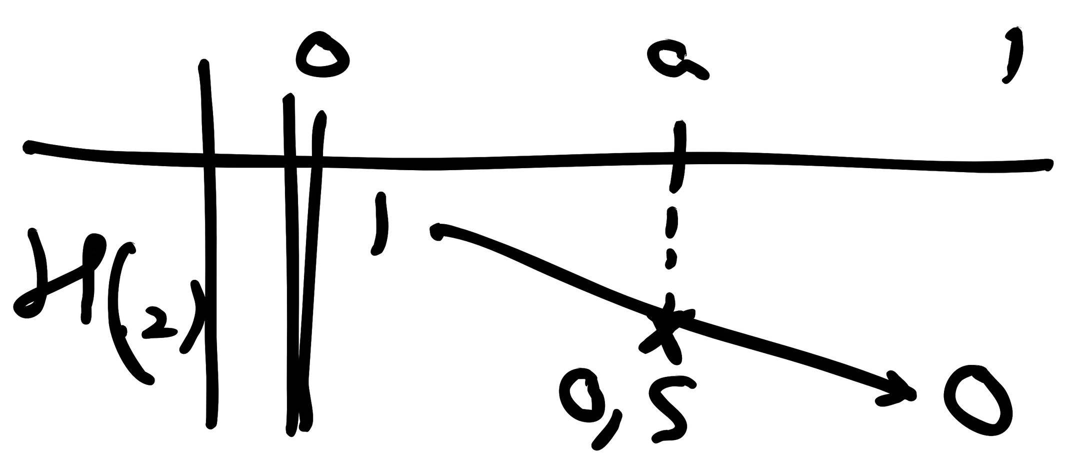
$$= F(-\ln a) - \frac{a}{2}(\ln a)^2 - F(0)$$

$$= (\ln a - 1) e^{\ln a} - \frac{a}{2}(\ln a)^2 + 1$$

$$= (\ln a - 1) a - \frac{a}{2}(\ln a)^2 + 1$$

$$H_a = a \ln a - \frac{a}{2}(\ln a)^2 - a + 1$$

3)



H est continue sur $]0,1]$ et strictement décroissante

$H(0) = 1 > \frac{1}{2}$

$H(1) = 0 < \frac{1}{2}$

D'après le corollaire du TVI, $0,5 \in]0;1[$

il existe un unique $a \in]0;1[$ tel que $H(a) = \frac{1}{2}$

4) A est un minorant de α et B un majorant de α

B - A = amplitude, elle doit être inférieure à 10

5) Calculatrice amplitude 0,01

$H(0,06) > \frac{1}{2}$

$H(0,07) < \frac{1}{2}$ donc $0,06 < \alpha < 0,07$.

Exercice II

1) loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

durée de vie moyenne de <u>4 ans</u>

Donc $E(T) = 4 = \frac{1}{\lambda}$

donc $\lambda = \frac{1}{4} = 0,25$

$P_{(T \geq t)}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$

donc $P_{(T \geq 3)}(T \geq 2 + 3) = P(T \geq 2)$

$P(T \geq 2) = e^{-2\lambda} = e^{-1/2}$

$P(T \geq 2) \approx 0,61$

Affirmation <u>fausse</u>

2) $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$

$z(z^2 - 3z + 3) = 0$

$\begin{cases} z^2 - 3z + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$z^2 - 3z + 3 = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 \end{cases}$

$\Delta = (-3)^2 - 4(3 \times 1)$

$= 9 - 12 = -3$

$z_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$

Les solutions sont : $z = 0$; $z_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$.

$z_0 = 0$ (O affixe z_0)

$z_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$ (A affixe z_1)

$z_2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$ (B affixe z_2).

triangle équilatéral $OA = OB = OC$?

* $OA = |z_A - z_0| = |z_A| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$
* $OB = |z_B - z_0| = |z_B| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$
* $AB = |z_B - z_A| = \left| \cancel{\frac{3}{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \cancel{\frac{3}{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right|$

$= |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$OA = OB = AB$

Donc OAB est un triangle équilatéral.

Affirmation <u>Vraie</u>

Exercice III

Partie A :

$n = 34 > 30$

il y a une chance sur 2 que le thème A soit évalué le jour de l'examen :

$$p = \frac{1}{2}$$

$$np = 34 \times \frac{1}{2} = 17 \geqslant 5$$

$$n(1-p) = 34 \times \frac{1}{2} = 17 \geqslant 5$$

Intervalle de fluctuation :

$$I_{34} = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}5 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5\times 0{,}5}{34}} \,;\, 0{,}5 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5\times 0{,}5}{34}}\right]$$

$$I_{34} \approx [0{,}332 \,;\, 0{,}668]$$

$$f = \frac{22}{34} = \frac{11}{17} \approx 0{,}647$$

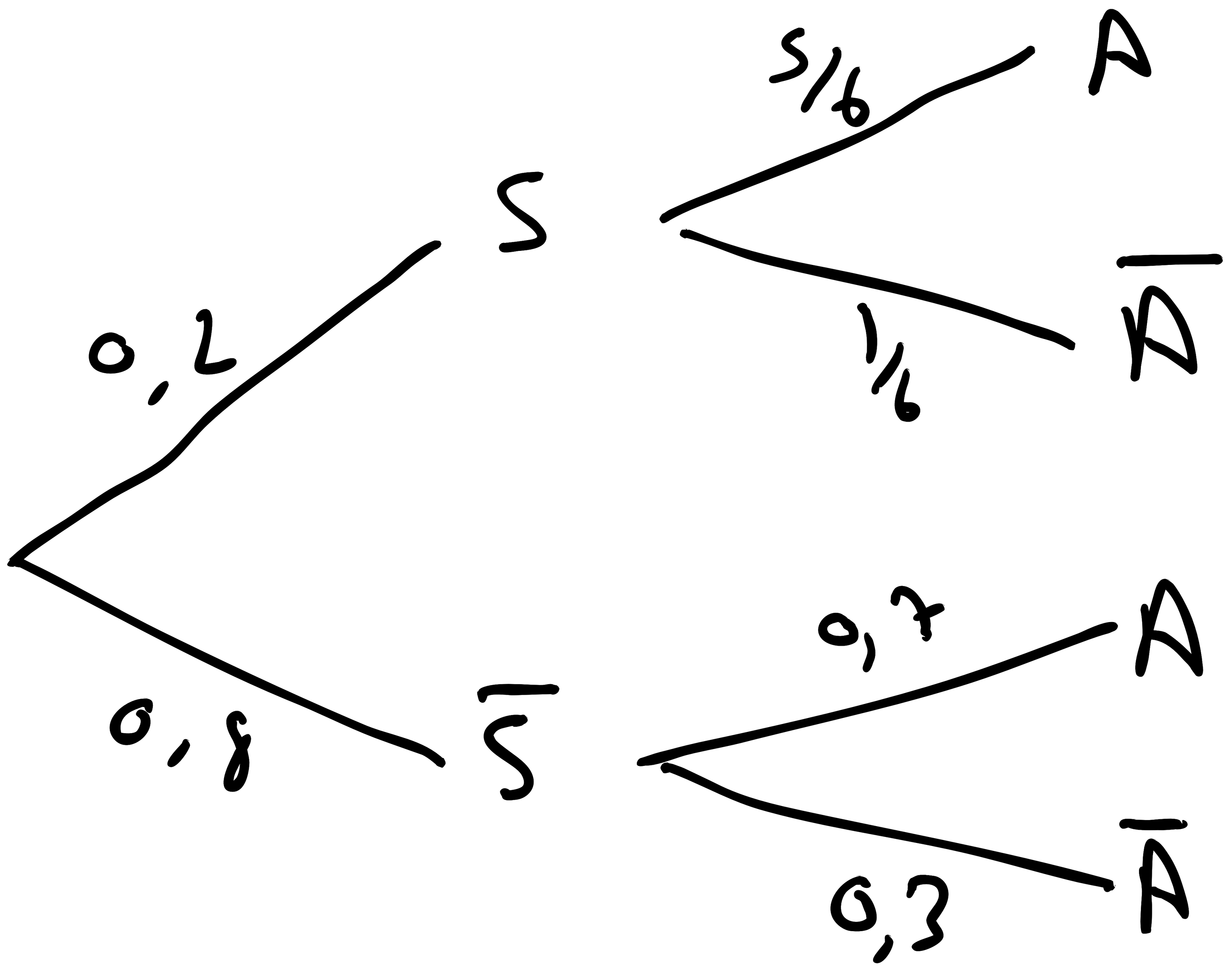
$$f \in I_{34}.$$

On ne peut pas rejeter au seuil de 95 %, l'affirmation.

Partie B :

S : " l'étudiant suit le stage "

A : " l'étudiant a traité le sujet A ".



$P_{\overline{A}}(S) = ?$

$$P(\overline{A}) = P(S \cap \overline{A}) + P(\overline{S} \cap \overline{A})$$
$$= 0,2 \times 1/6 + 0,8 \times 0,3$$
$$P(\overline{A}) = \frac{41}{150} \quad (\approx 0,273).$$

$$P_{\overline{A}}(S) = \frac{P(S \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0,2 \times 1/6}{\left(\frac{41}{150}\right)} = \frac{1/30}{\frac{41}{150}}$$

$$P_{\overline{A}}(S) = \frac{5}{41} \quad (\approx 0,122)$$

Partie C :

$$P(T \leq 235) = 0,98$$

$$\Leftrightarrow P(T - 225 \leq 235 - 225) = P(T - 225 \leq 10) = 0,98$$

$$P\left(\frac{T - 225}{\sigma} \leq \frac{10}{\sigma} \right) = 0,98$$

$Z = \dfrac{T - 225}{\sigma}$ suit la loi normal centrée réduite.

Calculatrice :

$$P(Z \leq k) = 0,98$$

alors $k \approx 2,05$

D'où $\dfrac{10}{\sigma} \approx 2,05$

soit $\sigma \approx \dfrac{10}{2,05}$

$$\sigma \approx 4,9 .$$

Exercice IV :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Montrons que (u_n) converge.

$$u_0 = 0$$
$$u_1 = 1/2 = \frac{1}{1+1}$$
$$u_2 = 2/3 = \frac{2}{2+1}$$
$$u_3 = 3/4 = \frac{3}{3+1}$$
$$u_4 = \frac{4}{5} = \frac{4}{4+1} \quad \dots$$

Montrons par récurrence que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

Initialisation $u_0 = 0$ $\quad \dfrac{0}{0+1} = 0$ vrai

Hérédité : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ Montrons que $\dfrac{n+1}{n+2} = u_{n+1}$

$$u_n = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2(n+1)-n}{n+1}\right)} = \frac{n+1}{2n+2-n}$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \quad \text{vrai}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

$\lim\limits_{+\infty} u_n = ?$ $\quad \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n}{n(1+1/n)} = \dfrac{1}{1+1/n}$

$$\lim_{+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

donc $\lim_{+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

<u>Conclusion</u> : $\lim_{+\infty} (u_n) = 1$

donc la suite converge vers 1.

Exercice V :

1) a) $A(-1,-1,0)$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$

$B(6,-5,1)$

$C(1,2,-2)$ $\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$

$7 = 2k \quad k = \frac{7}{2}$

$-4 = 3k \quad k = \frac{-4}{3}$

donc $\frac{7}{2} \neq \frac{-4}{3}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ils définissent un plan.

b) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \times 7 + 16 \times (-4) + 29 \times 1 = 0$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 2 + 16 \times 3 + 29 \times (-2) = 0$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

D'où $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c) Une équation cartésienne du plan (ABC) :

$ax + by + cz + d = 0$ avec $\vec{n}(a, b, c)$

Donc $5x + 16y + 29z + d = 0$

Comme A appartient au plan (ABC) on a :

$5 \times x_A + 16 y_A + 29 z_A + d = -5 - 16 + 0 + d = 0$

donc $d = +16 + 5 = 21$

Une équation de (ABC) : $5x + 16y + 29z + 21 = 0$.

2) a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 14 - 12 - 2 = 0$

Le triangle ABC est rectangle en A

$AB = \sqrt{49 + 16 + 1} = \sqrt{66}$

$AC = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$

$AB \neq AC$, ABC n'est pas isocèle.

b) $\mathcal{A}_{ABC} = ?$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

$$= \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{66} \times \sqrt{17}}{2}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\sqrt{1122}}{2}$$

3) a) $S(13 ; 37 ; 54) \in (ABC)$

$5x_S + 16y_S + 29z_S = 5 \times 13 + 16 \times 37 + 29 \times 54$

$= 2223 \neq 0$

S n'appartient pas au plan ABC

Conclusion : les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

b) $\vec{n}$ vecteur normal du plan (ABC) est également vecteur directeur de la droite (D).

Une représentation paramétrique de (D) :

$$\begin{cases} x = 13 + 5k \\ y = 37 + 16k \;, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = \underbrace{54}_{\text{coordonnées de } S} + \underbrace{29}_{\text{coordonnées du vecteur directeur } \vec{n}} k \end{cases}$$

$$5x + 16y + 29z + 21 = 0$$

$$5(13 + 5k) + 16(37 + 16k) + 29(54 + 29k) + 21 = 0$$

$$65 + 25k + 592 + 256k + 1566 + 841k + 21 = 0$$

$$1122k + 2244 = 0$$

$$k = -\frac{2244}{1122} = -2$$

$k = -2$

$$\begin{cases} x = 13 - 10 \\ y = 37 - 32 \\ z = 54 - 58 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = -4 \end{cases}$$

Les coordonnées du point H sont : $(3; 5; -4)$

4) $SH = \sqrt{(3-13)^2 + (37-5)^2 + (4-54)^2}$

$SH = \sqrt{4488} = 2\sqrt{1122}$

Le volume SABC : $V = \dfrac{A \times SH}{3}$

$$V = \frac{\frac{\sqrt{1122}}{2} \times 2\sqrt{1122}}{3} = \frac{1122}{3}$$

$V = 374.$