

Durée : 4 heures

A. P. M. E. P.

∞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∞
mars 2017

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x}$$

et on note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Partie A

1. Justifier toutes les informations du tableau de variations de f donné ci-dessous.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0

2. Soit F la fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ par

$$F(x) = (-x - 1)e^{-x}.$$

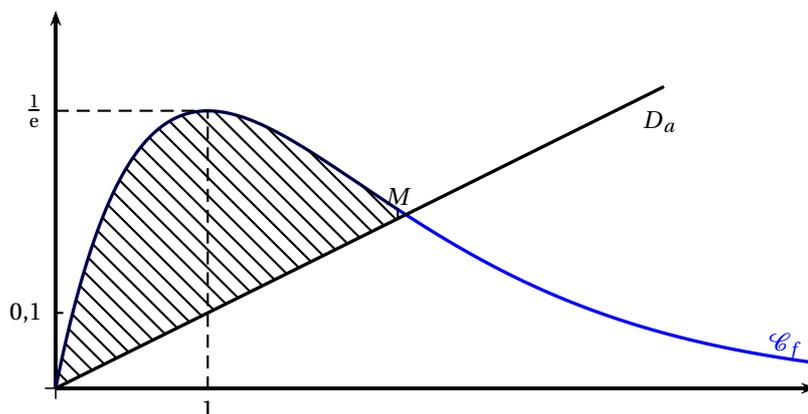
Démontrer que la fonction F est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. On considère la droite D_a d'équation $y = ax$ et M le point d'intersection de la droite D_a avec la courbe \mathcal{C}_f . On note x_M l'abscisse du point M .

On note $\mathcal{H}(a)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous, c'est-à-dire du domaine situé sous la courbe \mathcal{C}_f au-dessus de la droite D_a et entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = x_M$.

Le but de cette partie est d'établir l'existence et l'unicité de la valeur de a telle que $\mathcal{H}(a) = 0,5$ puis d'étudier un algorithme.



1. Prouver que la droite D_a et la courbe \mathcal{C}_f ont un unique point d'intersection M distinct de l'origine.
On admet dans la suite de l'exercice que le point M a pour abscisse $x_M = -\ln a$ et que la courbe \mathcal{C}_f est située au-dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0; -\ln(a)]$.
2. Montrer que $\mathcal{H}(a) = a \ln(a) - \frac{1}{2} a (\ln(a))^2 + 1 - a$.
3. Soit la fonction \mathcal{H} définie sur $]0; 1]$ par $\mathcal{H}(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x (\ln(x))^2 + 1 - x$.
On admet que \mathcal{H} est dérivable sur $]0; 1]$ et que son tableau de variations correspond à celui qui est proposé ci-dessous.

x	0	1
$\mathcal{H}(x)$	1	0

Justifier qu'il existe un unique réel $a \in]0; 1[$ tel que $\mathcal{H}(a) = 0,5$.

4. On considère l'algorithme présenté ci-dessous.

VARIABLES :	A, B et C sont des nombres ; p est un entier naturel.
INITIALISATION :	Demander la valeur de p A prend la valeur 0 B prend la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que $B - A > 10^{-p}$ C prend la valeur $(A + B)/2$ Si $\mathcal{H}(C) > 0,5$ Alors A prend la valeur de C Sinon B prend la valeur de C Fin de la boucle Si Fin de la boucle Tant que
SORTIE :	Afficher A et B .

Que représentent les valeurs A et B affichées en sortie de cet algorithme ?

5. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de a .

EXERCICE 2**3 points****Commun à tous les candidats**

Répondre à chacune des affirmations ci-dessous par *Vrai* ou *Faux* en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1. La durée de vie T (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$.
On sait qu'un tel appareil a une durée de vie moyenne de quatre ans.
La probabilité que cet appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il a déjà fonctionné trois ans est d'environ 0,39 à 0,01 près.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .
L'équation $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$ admet trois solutions dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , qui sont les affixes de trois points formant un triangle équilatéral.

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Des étudiants d'une université se préparent à passer un examen pour lequel quatre thèmes (A, B, C et D) sont au programme.

Partie A

Sur les 34 sujets de l'examen déjà posés, 22 portaient sur le thème A.
Peut-on rejeter au seuil de 95% l'affirmation suivante : « il y a une chance sur deux que le thème A soit évalué le jour de l'examen » ?

Partie B

Le thème A reste pour beaucoup d'étudiants une partie du programme difficile à maîtriser. Un stage de préparation est alors proposé pour travailler ce thème.

Lors de l'examen, on a constaté que s'il y a un exercice portant sur le thème A :

- 30% des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice ;
- $\frac{5}{6}$ des étudiants ayant suivi le stage l'ont traité.

On sait de plus que 20% des étudiants participent au stage.

Lors des résultats de l'examen, un étudiant s'exclame : « Je n'ai pas du tout traité le thème A ».

Quelle est la probabilité que cet étudiant ait suivi le stage ? On arrondira le résultat à 0,001 près.

Partie C

On suppose que la variable aléatoire T , associant la durée (exprimée en minutes) que consacre un étudiant de cette université pour la composition de cet examen, suit la loi normale d'espérance $\mu = 225$ et d'écart-type σ où $\sigma > 0$.

La probabilité qu'un étudiant finisse son examen en moins de 235 minutes est de 0,98.

Déterminer une valeur approchée de σ à 0,1 près.

(On pourra, par exemple, introduire la variable aléatoire $Z = \frac{T-225}{\sigma}$).

EXERCICE 4

3 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \geq 0. \end{cases}$$

On obtient à l'aide d'un tableur les premiers termes de cette suite :

	A	B	C
1		u_n	u_n
2	n	(en valeurs exactes)	(en valeurs approchées)
3	0	0	0
4	1	1/2	0,5
5	2	2/3	0,666 666 667
6	3	3/4	0,75
7	4	4/5	0,8
8	5	5/6	0,833 333 333
9	6	6/7	0,857 142 857
10	7	7/8	0,875
11	8	8/9	0,888 888 889
12	9	9/10	0,9
13	10	10/11	0,909 090 909

Prouver que la suite (u_n) converge.

EXERCICE 5

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0; I, J, K)$.

On considère les points

$$A(-1; -1; 0), B(6; -5; 1), C(1; 2; -2) \text{ et } S(13; 37; 54).$$

1. a. Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
 b. Prouver que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. a. Déterminer la nature du triangle ABC.
 b. Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unités d'aire, $\frac{\sqrt{1122}}{2}$.
3. a. Prouver que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
 b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S coupe le plan (ABC) en un point noté H.
 Déterminer les coordonnées du point H.
4. Déterminer le volume du tétraèdre SABC.
On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$\frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}.$$