Exercice 2 :

1)

x	-1	α	1	β	2	3
$f(x)$	$-2<0$	0	$2>0$	0	$-1<0$	$-\frac{1}{2}<0$

$f(x) = 0$

D'après le tableau de variation, $f(x) = 0$ admet 2 solutions.

réponse (b)

2) $\ln(2x) = 2$

$2 = \ln e^2$ $\quad (2 = 2 \times 1 = 2 \times \ln e = \ln e^2)$

Donc $\ln(2x) = \ln e^2 \iff 2x = e^2$

$\iff x = \frac{e^2}{2}$

Donc $\ln(2x) = 2$ admet une unique solution x_0 sur $\mathbb{R}$, avec $x_0 = \frac{e^2}{2}$

réponse (b)

3) (U_n) suite géométrique $\qquad U_0 = 400$ et $q = \frac{1}{2}$.

$S = U_0 + \dots + U_{10}$

(cours $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{(1-q)}$

$= 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1-q}$)

donc $S = U_0 \times \frac{1 - q^{11}}{1-q}$

$= 400 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}}$

$= 400 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{\frac{1}{2}} = 2 \times 400 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right)$

$S = 800\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right)$

réponse d

4) $U_0 = 50 \qquad U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n$

(U_n) suite géométrique de 1er terme $U_0 = 50$
et de raison $q = 1,2$

Donc $U_n = U_0 \times q^n = 50 \times (1,2)^n$

On veut connaître n tel que $U_n \geqslant 120$.

$U_n \geqslant 120 \Leftrightarrow 50 \times (1,2)^n \geqslant 120$

$\Leftrightarrow 1,2^n \geqslant \frac{120}{50} = \frac{12}{5}$

$\Leftrightarrow 1,2^n \geq \frac{12}{5}$

$\Leftrightarrow \ln(1,2)^n \geq \ln\left(\frac{12}{5}\right)$ ("ln" croissante sur $]0;+\infty[$)

$\Leftrightarrow n\ln(1,2) \geq \ln\left(\frac{12}{5}\right)$ ($\ln a^n = n\ln a$)

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{12}{5}\right)}{\ln(1,2)}$ ($\ln 1,2 > 0$)

$\Leftrightarrow n \geq 4,8$

Donc $\underline{n = 5}$

l'algorithme affiche $\underline{n = 5}$

<u>réponse C</u>

5) $f(x) = 2 + 3\ln x$ tangente au point d'abscisse $a=1$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $f'(x) = \frac{3}{x}$

$f'(1) = 3$

$f(1) = 2$

Donc $y = 3(x-1) + 2$

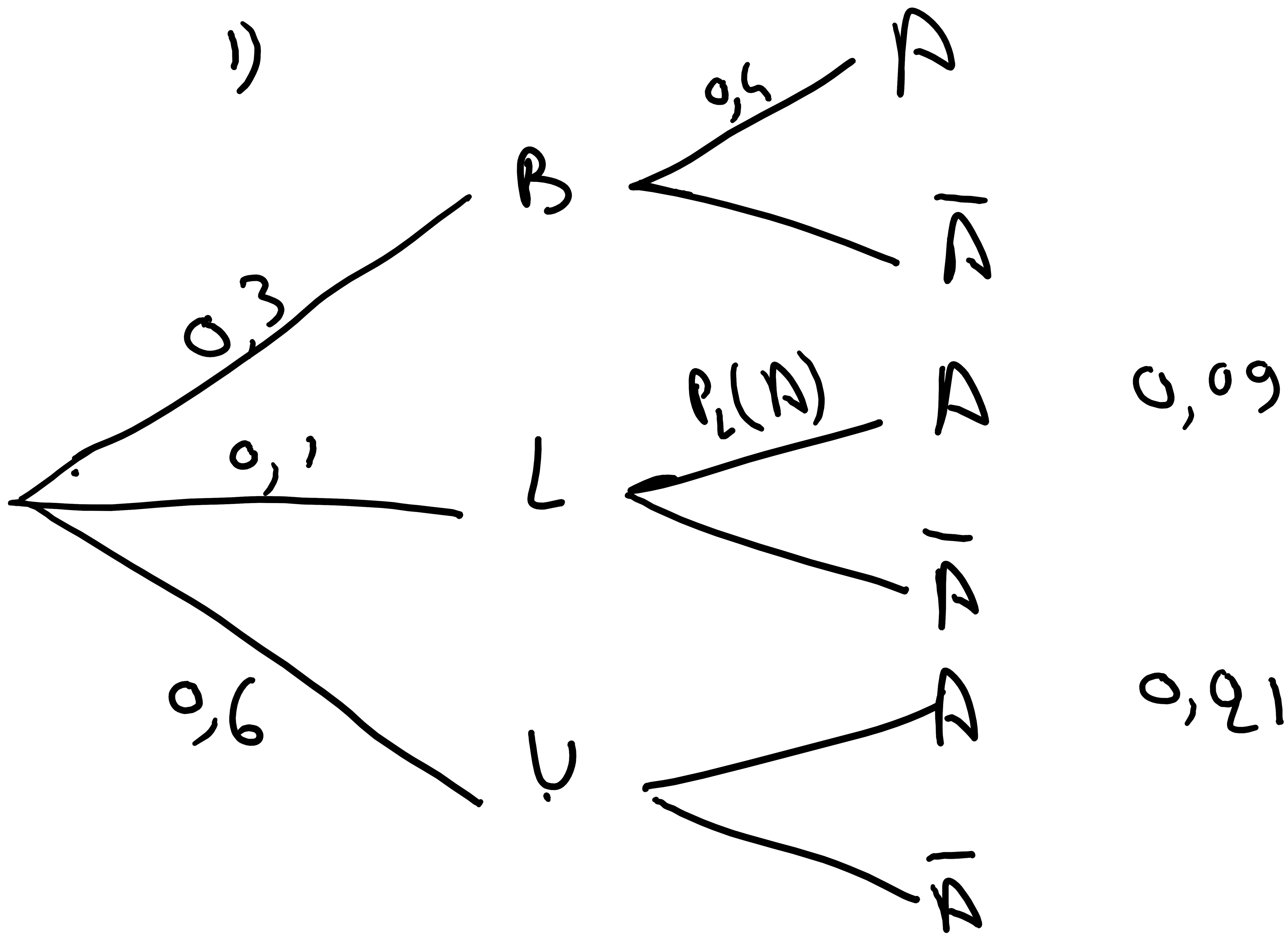
$y = 3x - 3 + 2 = 3x - 1$

<u>réponse b</u>

Exercice II :

Partie A :

1)



* 30 % des clients ont loué une berline $P(B) = 0{,}30$
  10 % ———————— Luxe $P(L) = 0{,}10$

donc $P(U) = 1 - (P(B) + P(L)) = 0{,}6$.

* 9% des clients ont loué un véhicule luxe et a choisi opt A donc :
  $P(L \cap A) = 0{,}09$
* 21% ———— ———————— utilitaire et ————————
  donc $P(U \cap L) = 0{,}21$
* 40% des clients qui ont loué une berline ont choisi A
  donc $P_B(A) = 0{,}40$.

2) On veut calculer $P(B \cap A) = P(B) \times P_B(A) = 0{,}4 \times 0{,}3$

$P(B \cap A) = 0{,}12$.

2) On veut calculer $P(A)$:

$$P(A) = P(B \cap A) + P(L \cap A) + P(U \cap A)$$

$$= 0,12 + 0,09 + 0,21$$

$$P(A) = 0,42$$

3) $$P_L(A) = \frac{P(L \cap A)}{P(L)}$$

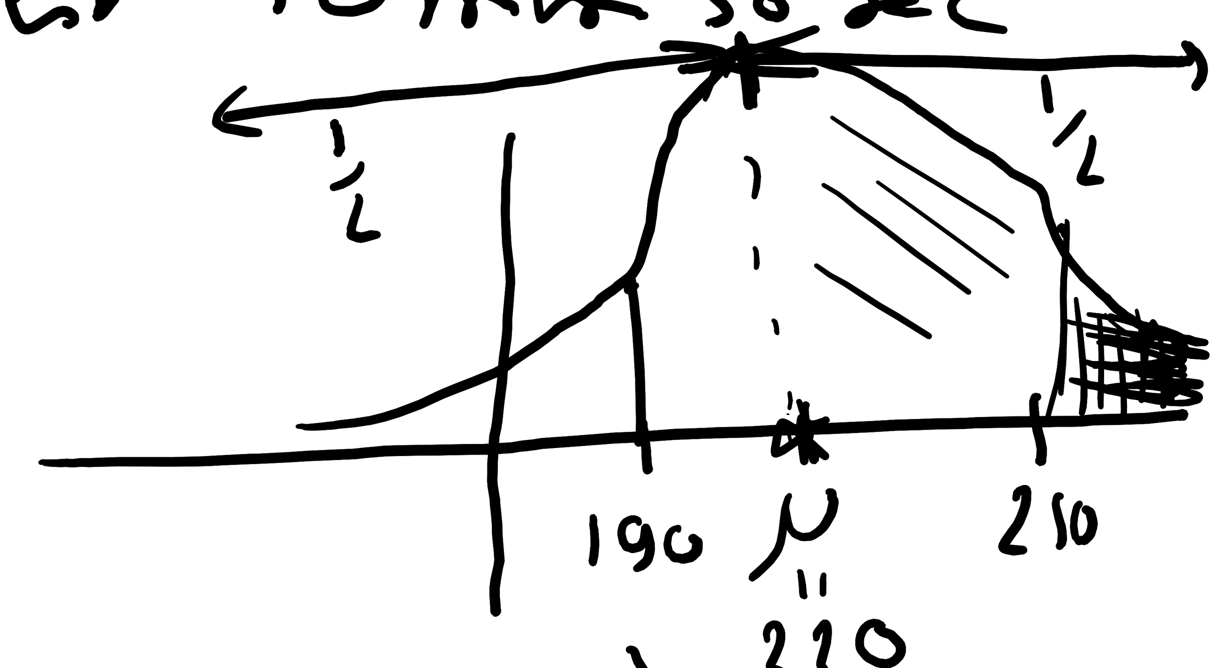
$$P_L(A) = \frac{0,09}{0,1} \qquad P_L(A) = 0,9$$

Partie B :

1) $$P(T \geq 12) = \frac{20-12}{20-1} = \frac{8}{19} \quad (\approx 0,421)$$

2) $$E(T) = \frac{a+b}{2} = \frac{20+1}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$$

Le temps d'attente moyen est 10 min 30 sec



Partie C :

$$X \sim \mathcal{N}(220; 30^2)$$

$$P(X \geq 250) = \frac{1}{2} - P(220 \leq X \leq 250)$$

$$P(X \geq 250) \approx \frac{1}{2} - 0,341$$

$$P(X \geq 250) \approx 0,159.$$

Exercice III :

Partie A :

1) $f(x) > 0$ donc $x \in]0,5 ; 6]$

2) Le maximum semble être atteint pour $x = 1,5$ et vaudrait 2,2.

3) $f'(1,5) = 0$ (maximum tangente horizontale)

f est croissante sur $]0 , 1,5[$ donc $f'(x) > 0$

f est décroissante sur $]1,5 ; 6]$ donc $f'(x) < 0$.

4) Sur $[0 ; 2,5]$ les tangentes sembleraient être au-dessus de la courbe

Sur $[2,5 ; 6]$ les tangentes sembleraient être en dessous de la courbe.

Donc la courbe admettrait un point d'inflexion en $x = 2,5$.

5) Encadrement de $\int_1^4 f(x)\,dx$

(On compte le nombre de carreaux)

$$3 \leq \int_1^4 f(x)\,dx \leq 6$$

Partie B :

$f(x) = (10x - 5)e^{-x}$

$f'(x) = (-10x + 15)e^{-x}$ et $f''(x) = (10x - 25)e^{-x}$

1) tableau de variation :

$$f'(x) = (-10x + 15)e^{-x}$$

$x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

Donc signe de $f'(x)$ = signe de $(15 - 10x)$

x	0		$1,5$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-5	$\nearrow$	$10e^{-1,5}$	$\searrow$	$55e^{-6}$

$\begin{cases} 15 - 10x = 0 \\ x = \frac{15}{10} \\ x = 1,5 \end{cases}$

2) $f''(x) = (10x - 25)e^{-x}$

$x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ signe de $f''(x)$ = signe de $(10x - 25)$

$10x - 25 = 0$ donc $x = 2,5$

$f''(x) \leq 0$ si $x \in [0; 2,5]$ et $f''(x) \geq 0$ si $x \in [2,5; 6]$.

cl : f est concave sur $[0; 2,5]$

f est convexe sur $[2,5; 6]$.

3) $F(x) = (-10x - 5)e^{-x}$ est une primitive de f

$F'(x) = -10e^{-x} + (-10x - 5)(-e^{-x})$

(car $(uv)' = u'v + uv'$ et $(e^u)' = u'e^u$)

$F'(x) = -10e^{-x} + 10x e^{-x} + 5e^{-x}$

$F'(x) = (10x - 5)e^{-x} = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $[0, 6]$.

4) $\int_2^4 f(x)\,dx = [F(x)]_2^4 = F(4) - F(2)$

$= -45e^{-4} + 25e^{-2}$

$\approx 2{,}56$ (arrondi au centième).

5) $\mathcal{A}_{ABCD} = \int_2^4 f(x)\,dx$

$\mathcal{A}_{ABCD} = AD \times DC$ avec $DC = 2$

donc $2\,AD = 2{,}56$

soit $AD \approx \frac{2{,}56}{2} \approx 1{,}28$

La hauteur AD vaut $1{,}28$ à 10^{-2} près.

Exercice IV :

410 tonnes 2013

$\downarrow$

332 tonnes en 2015

1) évolution sur l'année

$$\underset{2013}{410} \xrightarrow{\searrow t\%} \underbrace{410 - \frac{410 \times t}{100} = 410\left(1 - \frac{t}{100}\right)}_{2014}$$

$$410\left(1-\frac{t}{100}\right) \xrightarrow{\searrow t\%} \underbrace{410\left(1-\frac{t}{100}\right)}_{2015} - \frac{410\left(1-\frac{t}{100}\right) \times t}{100}$$

$$= 410\left(1-\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{t}{100}\right)$$

$$= 410\left(1-\frac{t}{100}\right)^2.$$

Donc $410\left(1-\frac{t}{100}\right)^2 = 332$

$$\left(1-\frac{t}{100}\right)^2 = \frac{332}{410} \approx 0,81$$

$1 - \frac{t}{100} \approx 0,9$ donc $\frac{t}{100} \approx 0,1$

Soit $t \approx 10\%$

On peut donc considérer que l'évolution d'une année sur l'autre répond à une diminution de 10%.

2) $t = 10\%$

quantité de polluant rejetée < 180 tonnes ?

$U_0 = 410$

(U_n) = quantité de polluants rejetés année $2013+n$

(U_n) Suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de 1er terme $U_0 = 410$

$$U_{n+1} = U_n - \frac{U_n \times 10}{100} = U_n\left(1 - \frac{10}{100}\right) = 0,9U_n$$

$$U_n = U_0 \times q^n = 410 \times 0,9^n < 180$$

$$\Leftrightarrow 0,9^n < \frac{180}{410} = \frac{18}{41}$$

$$\Leftrightarrow \ln 0,9^n < \ln\left(\frac{18}{41}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,9) < \ln\left(\frac{18}{41}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{18}{41}\right)}{\ln 0,9} \quad (\text{car } \ln 0,9 < 0)$$

$$\Leftrightarrow n > 7,8$$

donc $\underline{n = 8}$

En $(2013 + 8)$, soit en $\underline{2021}$, la quantité de polluants rejetés sera en dessous du seuil de 180.