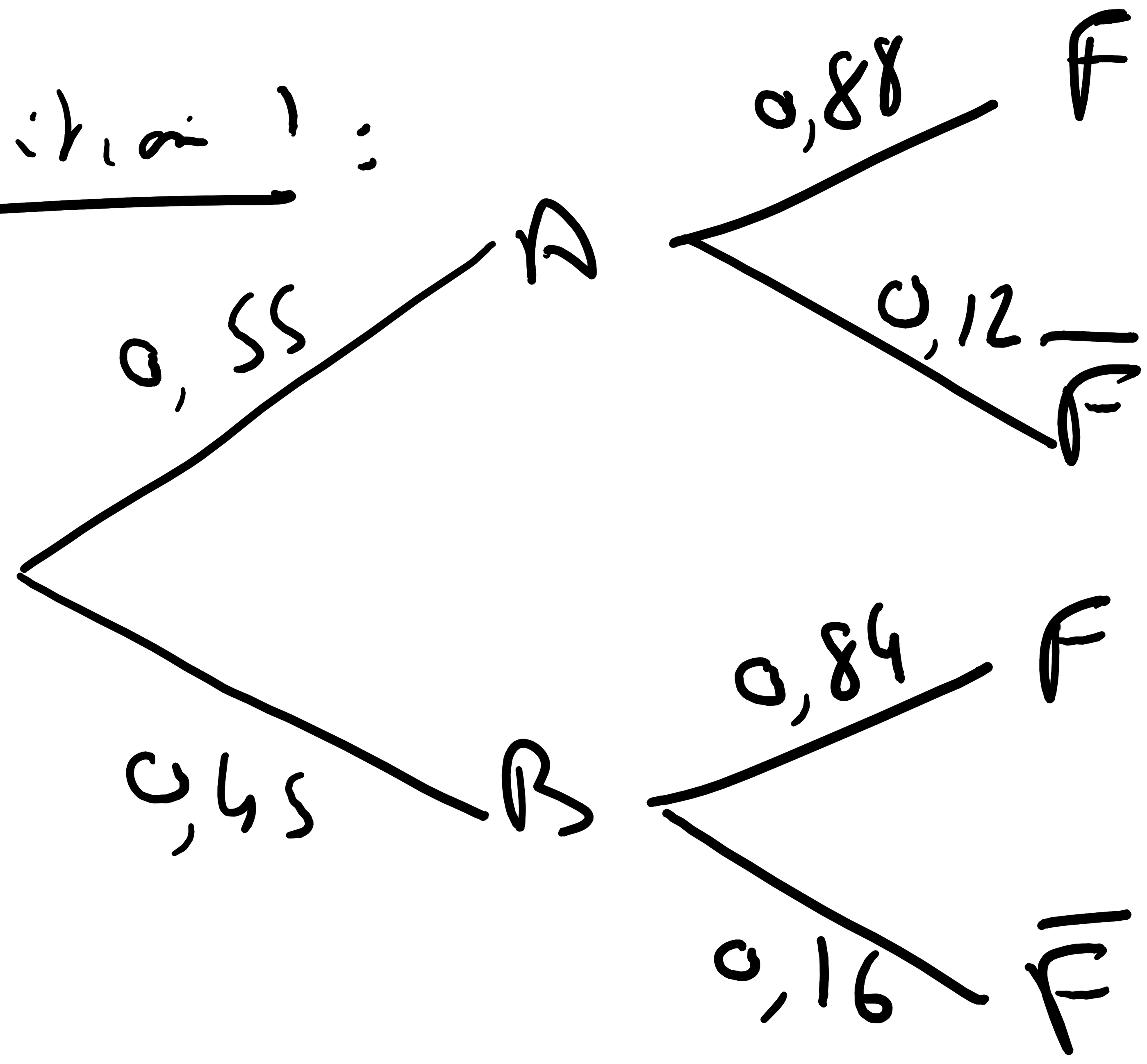
Exercice 2 :

Partie A :

* proposition 1 :



$$P(F) = P(A\cap F) + P(B\cap F)$$
$$= P(A)\times P_A(F) + P(B)\times P_B(F)$$
$$= 0,55\times 0,88 + 0,45\times 0,84$$

$$P(F) = 0,862$$

proposition 1 <u>vraie</u>

* proposition 2 :

On sait qu'il donne 1 fruit

On veut calculer $P_F(A) = \dfrac{P(A\cap F)}{P(F)}$

$$P_F(A) = \frac{P(A)\times P_A(F)}{P(F)} = \frac{0,55\times 0,88}{0,862} \approx 0,561$$

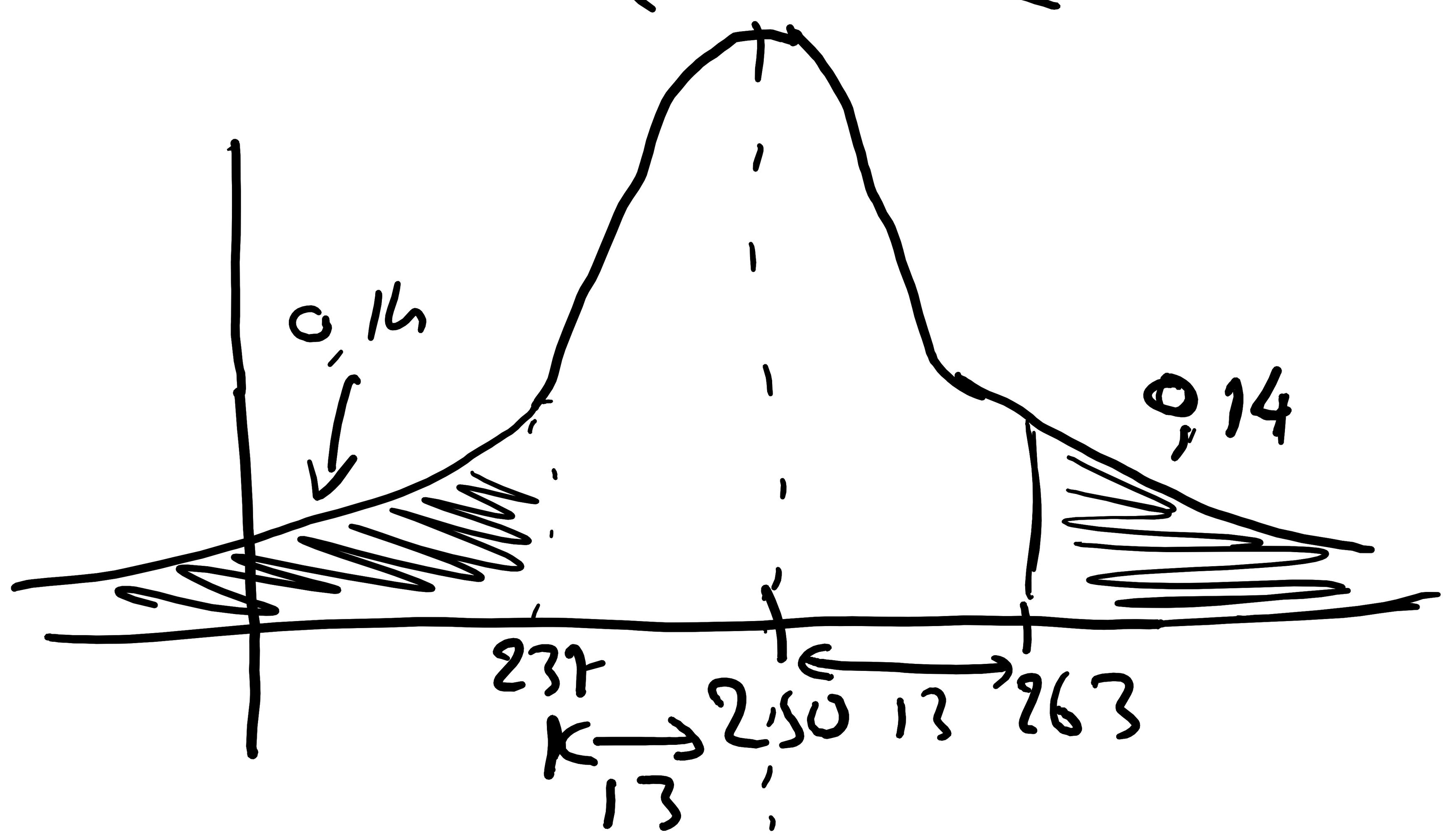
proposition 2 <u>fausse</u>

Partie B :

1) X suit loi normale $\mu = 250$ et σ.

$$P(X \leq 237) = 0,14$$

$$P(237 \leq X \leq 263)$$



$$P(X \geq 263) = 0,14$$

$$P(237 \leq X \leq 263) = 1 - (P(X \geq 263) + P(X \leq 23$$

$$= 1 - 0,28 = 0,72.$$

2) a) $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$

Y suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

b) $P(X \leq 237) = 0,14$

$$P\left(\frac{X-250}{\sigma} \leq \frac{237-250}{\sigma}\right) = 0,14$$

$$P\left(Y \leq \frac{-13}{\sigma}\right) = 0,14.$$

c) à la calculatrice on trouve $\dfrac{-13}{\sigma} \simeq -1,08$

donc $\sigma \approx 12$ (arrondi à l'entier).

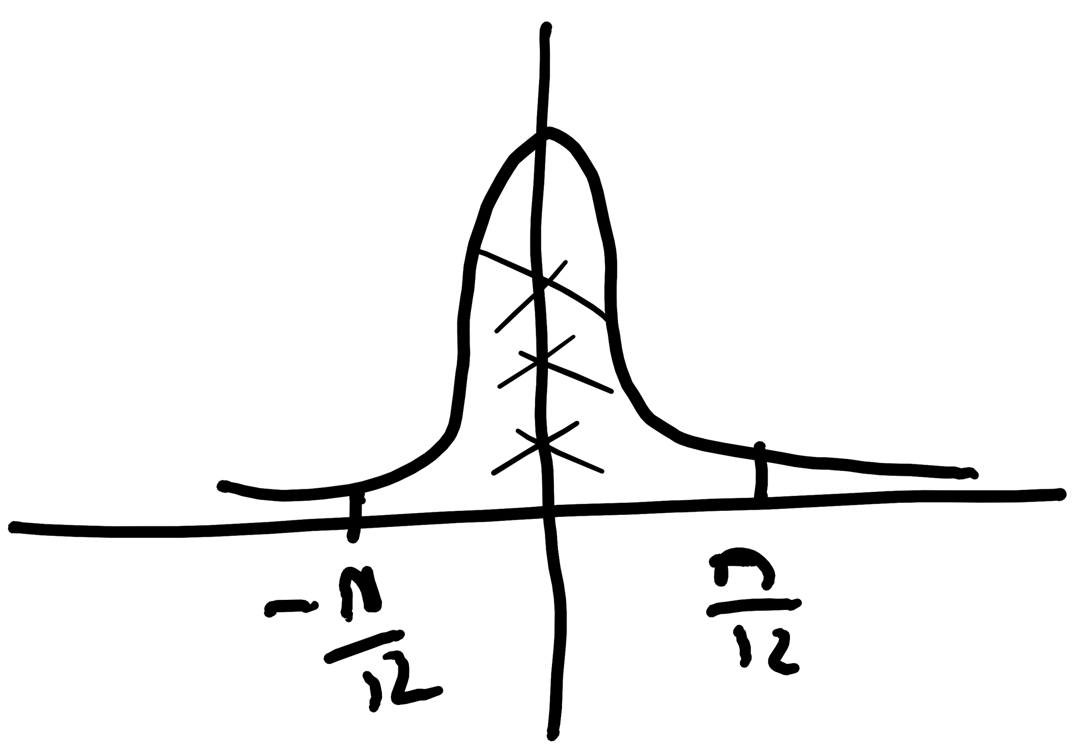
3) a) $P(250-n \leq X \leq 250+n) \geq 0,95$

$P\left(\frac{-n}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{n}{\sigma}\right) \geq 0,95$

$P\left(\frac{-n}{12} \leq Y \leq \frac{n}{12}\right) \geq 0,95$

$1-2P\left(Y \leq -\frac{n}{12}\right) \geq 0,95$

$P\left(Y \leq -\frac{n}{12}\right) \leq \frac{1-0,95}{2}$



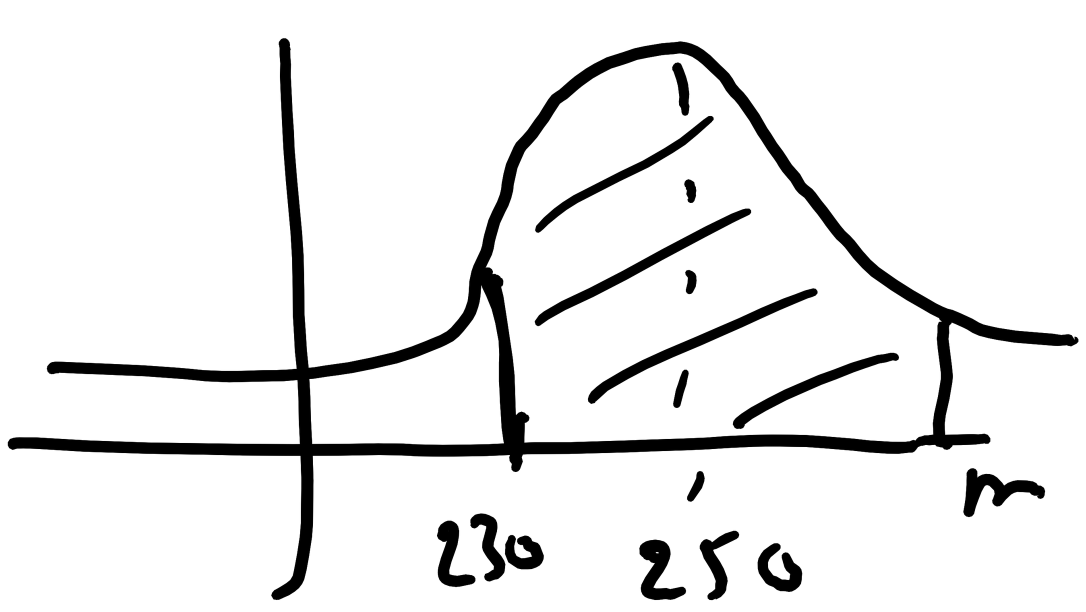
$P\left(Y \leq -\frac{n}{12}\right) \leq 0,025$

$\frac{-n}{12} \approx -1,96$ donc $\underline{n = 24}$

b) $P(230 \leq X \leq m) \geq 0,95$

$1 - P(X \leq 230) - P(X \geq m) \geq 0,95$

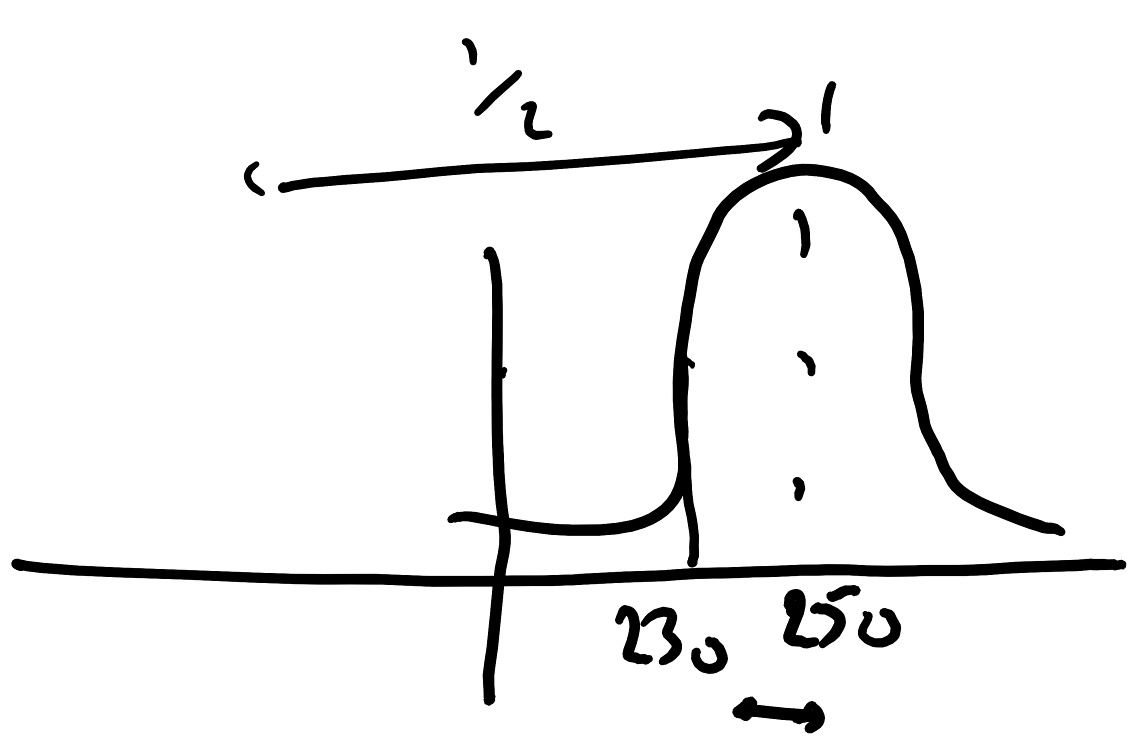
$P(X \geq m) = 1 - P(X \leq m)$



$\cancel{1} - P(X \leq 230) - \cancel{1} + P(X \leq m) \geq 0,95$

$P(X \leq m) - P(X \leq 230) \geq 0,95$

$P(X \leq m) \geq 0,95 + P(X \leq 230)$



$P(X \leq m) \geq 0,95 + \left(\frac{1}{2} - P(230 \leq X \leq 25$

$P(X \leq m) \geq 0,9978$

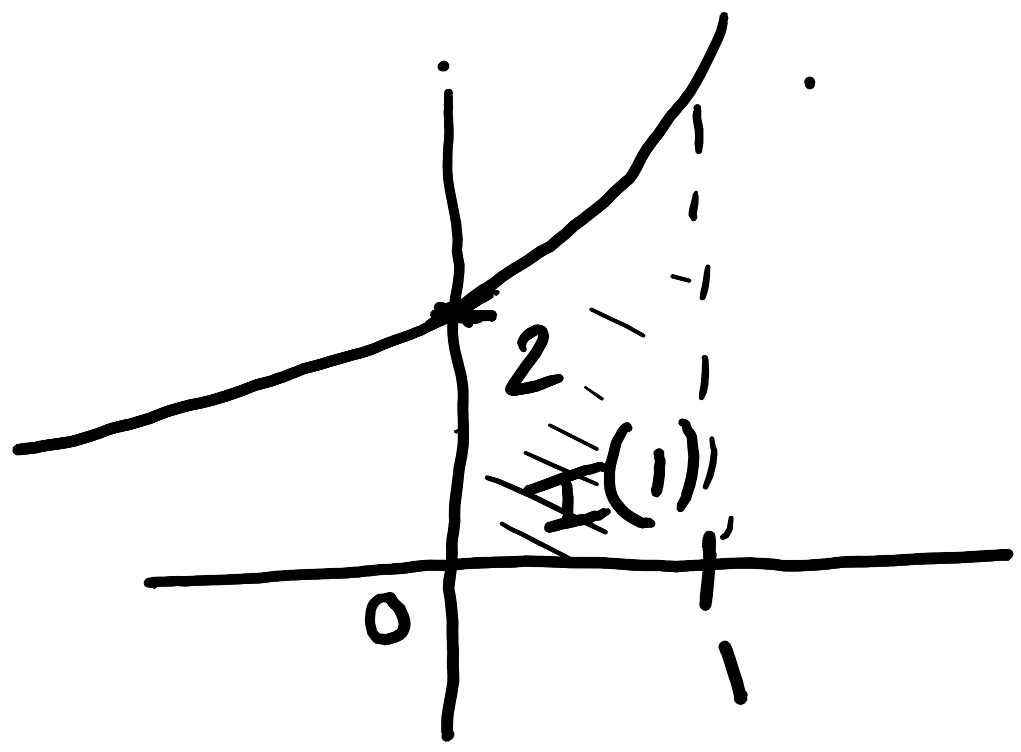
$m = 284,16$ donc $\underline{m = 285}$

Exercice II :

1) $a = 0$ alors $f_0(x) = 0$

$I(0) = \int_0^1 f_0(x)\,dx = 0$

2) a) $a = 1$ alors $f_1(x) = e^x + 1.$



$I(1)$ = aire entre la courbe C_1, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

$I_1(1) = \int_0^1 (e^x + 1)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_0^1 1\,dx$

$= [e^x]_0^1 + [x]_0^1$

$= e^1 - e^0 + 1 - 0 = e - 1 + 1$

$I_1(1) = 1$ $\quad I(1) \approx 2{,}7.$

3) $I(a) = 2$ $\quad f_a(x) = a e^{ax} + a$

$a \to$ primitive $\underline{ax}$ $\quad a e^{ax} \to$ forme $u'e^u$
primitive $\underline{e^{ax}}$

$I(a) = [e^{ax}]_0^1 + [ax]_0^1 = e^a - e^0 + a.$

$e^a + a - 1 = 2$ donc $e^a + a = 3$

On pose $h(x) = e^x + x - 3$

$h(x) = 0$??

$h'(x) = e^x + 1$

$h'(x) = \underbrace{e^x}_{>0} + 1 > 0$

x	0	α	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	-2 $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

$\lim\limits_{+\infty} h(x) = +\infty$

$\left(\lim\limits_{+\infty} e^x = +\infty\right.$

et $\left.\lim\limits_{+\infty} x = +\infty\right)$

$h(0) = e^0 - 3 = -2$

h continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$0 \in [-2;+\infty[$, TVI

il existe un unique $\alpha \in [0;+\infty[$

tel que $h(\alpha) = 0$

A la calculatrice : $h(0,792) < 0$

$h(0,793) > 0$

$0,792 < \alpha < 0,793$

Exercice III :

1) a) augmente de 20%
perd de 100 g.

Initialement 1 kg = 1000 gr., d'où $u_0 = 1000$

(u_n) masse en gramme de bactéries

$$u_{n+1} = u_n + \underbrace{\frac{20}{100} u_n}_{\nearrow 20\%} - 100$$

$u_{n+1} = 1,2\, u_n - 100.$

b) $U_n > 30.000$.

$U_{22} \simeq 28103$

$U_{23} \simeq 33623$

Au bout de 23 jours, la masse de bactéries dépasse 30 kg.

c) Algorithme.

Variables : u et n sont des nombres

Traitement : u prend la valeur 1000
n prend la valeur 0
Tant que $U \leq 30000$
U prend la valeur $1,2 \times U - 100$
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que

Sortie Affiche N.

2) a) $u_n \geq 1000$

Initialisation : $u_0 = 1000$ vrai

Hérédité : $u_n \geq 1000$

Montrons que $u_{n+1} \geq 1000$

$$u_n \geq 1000$$

$$1,2\,u_n \geq 1200$$

$$1,2\,u_n - 100 \geq 1100$$

$$u_{n+1} \geq 1000$$ vrai rang$(n+1)$

Conclusion : pour tout n, $u_n \geq 1000$.

b) $u_{n+1} - u_n = 1,2\,u_n - 100 - u_n$

$$= 0,2\,u_n - 100$$

Or $u_n \geq 1000$ donc $0,2\,u_n - 100 \geq 100$

$$u_{n+1} - u_n \geq 100$$

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

(u_n) est croissante.

3) a) $v_n = u_n - 500$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2\,u_n - 100 - 500$$

$$= 1,2\,u_n - 600 = 1,2\left(u_n - \frac{600}{1,2}\right)$$

$$= 1,2\,(\underbrace{u_n - 500}_{= v_n}) = 1,2\,v_n$$

$v_{n+1} = 1,2\, v_n$

(v_n) suite géométrique de raison $q = 1,2$

et $v_0 = u_0 - 500 = 500$.

b) $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = 500 \times 1,2^n$

$v_n = u_n - 500$ d'où $u_n = v_n + 500$

$$u_n = 500 \times 1,2^n + 500$$

c) $\lim\limits_{+\infty} (1,2)^n = +\infty$ (car $1,2 > 1$).

donc $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$

<u>Partie B</u>:

$$f(t) = \frac{50}{1+49e^{-0,2t}}$$

1)a) $f(0) = \dfrac{50}{50} = 1$.

b) $f(t) < 50$?

$$f(t) - 50 = \frac{50 - 50(1+49e^{-0,2t})}{1+49e^{-0,2t}}$$

$$= \frac{\overbrace{-2450}^{<0}\;\overbrace{e^{-0,2t}}^{>0}}{\underbrace{1+49\underbrace{e^{-0,2t}}_{>0}}_{>0}} < 0$$

donc $f(t) - 50 < 0$ on a bien $\underline{f(t) < 50}$.

c) Sens de variation :

$$f(t) = \frac{50}{1+49e^{-0,2t}} \qquad \left(\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}\right)$$

$$f'(t) = 50\,\frac{+9,8e^{-0,2t}}{(1+49e^{-0,2t})^2} \qquad \left((e^u)' = u'e^u\right)$$

$$f'(t) = \frac{\overbrace{+490e^{-0,2t}}^{>0}}{\underbrace{(1+e^{-0,2t})^2}_{>0}} > 0$$

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	$1 \nearrow$	$+\infty$

d) $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,2t} = 0$

$\lim\limits_{+\infty} 1+49e^{-0,2t} = 1$

$\Big\}\ \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$

2) $t = 0$, 1000 grammes de bactéries dans la cuve.

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 50$, la masse des bactéries ne dépassera jamais 50 kg.

La masse augmente mais au bout d'un grand nombre de jours, il y aura 50 kg de bactéries dans la cuve.

3) $f(t) > 30$

$$\Leftrightarrow \frac{50}{1+49e^{-0,2t}} > 30$$

$$\Leftrightarrow 50 > 30\left(1+49e^{-0,2t}\right)$$

$$\left(\text{car } 1+49e^{-0,2t} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 50 > 30 + 1470e^{-0,2t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{1470} > e^{-0,2t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{147} > e^{-0,2t}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2}{147}\right) > -0,2t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{-0,2} < t$$

$$\Leftrightarrow 21,49 < t$$

$f(t) > 30$ si $t \in \left]\frac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{-0,2} ; +\infty\right[$

La masse dépassera les 30 kg à partir du 22 ième jour.

Partie C :

80 % des bactéries produites sont de type A

échantillon $200 = n$

$n = 200 \geq 30$

$np = 200 \times 0,80 = 160 \geq 5$

$n(1-p) = 200 \times 0,2 = 40 \geq 5$

les conditions sont réunies

fréquence observée $f = \frac{146}{200} = \frac{73}{100} = 0,73$

$$I_f = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

$$= [0,745 ; 0,855]$$

$f \notin I$, l'affirmation de l'entreprise peut être remise en cause.

Exercice IV :

1) vecteur directeur d'1 rayon $\vec{v}(a;b;c)$

réfléchi par (OAB) $\vec{v_1}(a;b;-c)$

———— (OBC) $\vec{v_2}(-a;b;-c)$

———— (OAC) $\vec{v_3}(-a;-b;-c)$

$\vec{v}_3 = -\vec{v}$ le rayon final est parallèle au rayon initial

($\vec{v_3}$ et $\vec{v}$ colinéaires)

2) a) $I_1(2,3,0)$

$\vec{v_2}(-2,-1,1)$

représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 - t \quad , \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1t \end{cases}$$

b) vecteur normal du plan (OBC) : $\vec{OA}(1;0;0)$

Equation (OBC) : $1x + 0y + 0z + d = 0$

$x + d = 0$ $\quad O \in (OBC)$

Donc $d = 0$

équation plan (OBC) : $\underline{x = 0}$

c) $I_2\ (0;\ 2,\ 1)$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$$

donc $x = 2 - 2t = 0$ $\underline{t = 1}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - 1 = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

I_2 appartient au plan (OBC) et à d_2.

3) $d_3 : \begin{cases} x = 0 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = 1 + k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$.

plan (OAC) : $\underline{y = 0}$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 2k \\ y = 2 - k \\ z = 1 + k \end{cases}$$

$2 - k = 0$ soit $k = 2$

Donc $I_3\ (4,\ 0,\ 3)$.

4) a) $\vec{u}\,(1,-2,0)$

$\mathcal{P}$ défini par d_1 et d_2

d_1 : $\vec{v_1}\,(-2,-1,-1)$

d_2 : $\vec{v_2}\,(-2,-1,1)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v_1} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} = -2+2=0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v_2} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} = -2+2=0$$

$\vec{u}$ et $\vec{v_1}$ sont orthogonaux

$\vec{u}$ et $\vec{v_2}$ sont orthogonaux

$\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ non colinéaires

$\vec{u}$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$.

b) $\vec{u}$ vecteur normal de $\mathcal{P}$

$$x-2y+d=0$$

$I_2 \in d_2$ donc $I_2 \in \mathcal{P}$ $\quad -4+d=0$

$d=4$

$$\mathcal{P}:\ x-2y+4=0$$

$I_3 \in \mathcal{P}$?? $\quad I_3\,(4,0,3)$

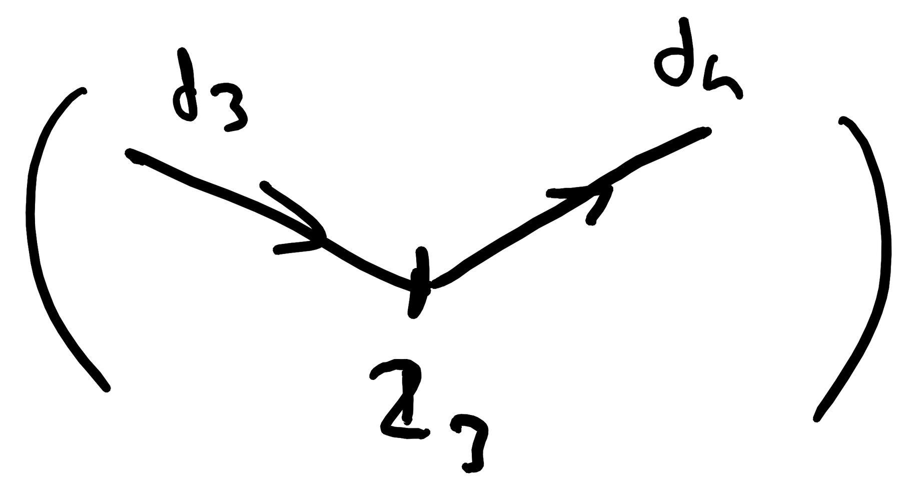
$4-2\times 0+4=8\neq 0 \quad I_3 \notin \mathcal{P}$

Les droites d_1, d_2 et d_3 ne sont pas situées dans un même plan

c) $d_1 \parallel d_4$ (hypothèse)

d_4 a le même vecteur directeur que d_1

$\overrightarrow{u_1}(-2,-1,-1)$ vecteur directeur de d_4.

$I_3 \in d_4$ 

Mais $I_3 \notin P$ défini par les droites d_1 et d_2

<u>Conclusion</u> : d_1, d_2 et d_4 ne sont pas situées dans un même plan.