Exercice 2 :

Partie A :

1) tangente horizontale, coefficient directeur de $T_0 = f'(1)$

$f'(1) = 0$

réponse (a)

2) $f'(0) = ?$

$A(0,1)$ et $C(+2,3) \in T_0$.

$$a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{3-1}{2-0} = \frac{2}{2} = 1 .$$

$f'(0) = 1$.

réponse (b)

3) $f(1) = 1,5$ (lecture graphique)

réponse (d) car on ne peut pas répondre précisément.

4) $\int_0^2 f(x)\,dx$ = Aire entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

nombre de carreaux

$2 \leq f(x)\,dx \leq 3$

Partie B :

$$F(x) = -(x^2+4x+5)e^{-x}$$

a) $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = -(2x+4)e^{-x} + (x^2+4x+5)e^{-x}$$
$$= e^{-x}[x^2+4x+5-2x-4]$$
$$= e^{-x}[x^2+2x+1]$$
$$= (x+1)^2 e^{-x} = f(x).$$

b) $\int_0^2 f(x)\,dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$

$$= [-(2^2+4\times 2+5)e^{-2}] - [-5e^0]$$
$$= -17e^{-2} + 5$$

2) $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

$$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x}$$
$$= e^{-x}(x+1)[2-(x+1)] = (x+1)(1-x)e^{-x}$$
$$= (1-x^2)e^{-x}$$

signe de $f'(x)$ = signe de $(1-x^2)$.

x		-1		1	
	$-$	0	$+$	0	$-$

Tableau de variation :

x	1		α		5
$f'(x)$	0	$-$			
$f(x)$	$f(1)=\frac{4}{e}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$f(5)=\frac{36}{e^5}$

$f(1) = \frac{4}{e}$ $(\approx 1,47)$

$f(5) = \frac{36}{e^5}$ $(\approx 0,24)$

f est continue et strictement décroissante sur $[1;5]$.

$1 \in [f(5) ; f(1)]$

D'après le TVI, il existe un unique $\alpha \in [1, 5]$

tel que $f(\alpha) = 1$.

Exercice II :

Partie A :

1) on prélève 100 clés USB

2 issues possibles $\begin{cases} \text{clé défectueuse } p = 0{,}015 \\ \text{clé non défectueuse } q = 1-p = 0{,}985 \end{cases}$

$P(D) = p = 0{,}015$

$q = 1 - p = 0{,}985.$

2) $P(X = 0) = \binom{100}{0} p^0 q^{100}$

$= 0{,}985^{100} \simeq 0{,}221$

$P(X = 1) = \binom{100}{1} p^1 \times q^{99}$

$= 100 \times 0{,}015 \times 0{,}985^{99}$

$\simeq 0{,}336.$

3) au plus 2 clés défectueuses.

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X = 2) = \binom{100}{2} p^2 q^{98} = 0{,}253$

donc $P(X \leq 2) \simeq 0{,}221 + 0{,}336 + 0{,}253$

$P(X \leq 2) \simeq 0{,}810.$

Partie B :

1) R . loi normale $\mathcal{N}(100, 1^2)$.

clé conforme
clé conforme lecteur $[98 ; 103]$

Calculatrice : $P(98 \leq R \leq 103) \simeq 0,976$

2) W vitesse écriture

$P(28 \leq W \leq 32) \approx 0,95$ (thème).

D'après le cours : $P(\mu - 2\sigma \leq W \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$

$\underbrace{\mu = 30}_{\text{axe de symétrie}}$ $\quad P(30 - 2\sigma \leq W \leq 30 + 2\sigma) \simeq 0,95$

⚠ $30 - 2\sigma = 28$ donc $\underline{\sigma = 1}$

Partie C :

Intervalle de confiance : $I_c = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

fréquence observée : $f = \frac{94}{100} = 0,94$

$I_c = \left[0,94 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; \overbrace{0,94 + \frac{1}{\sqrt{100}}}\right]$ ⚠ ≤ 1 ⚠

$I_c = [0,84 ; 1]$

Exercice III :

1) 10% quitte établissement
250 inscription

U_n = nb élèves le 1er septembre 2015+n
U_{n+1} = nb élèves le 1er septembre 2015+(n+1)

$$U_{n+1} = U_n - \underbrace{\frac{10 \times U_n}{100}}_{\text{10\% de } U_n \text{ quittant établissement,}} + \underbrace{250}_{\text{nvelles inscription}} = \left(1 - \frac{10}{100}\right)U_n + 250$$

$U_{n+1} = 0,9\, U_n + 250$

2) $v_n = U_n - 2500$.

a) $v_{n+1} = U_{n+1} - 2500 = (0,9\, U_n + 250) - 2500$

$= 0,9\, U_n - 2250 = 0,9\left(U_n - \frac{2250}{0,9}\right)$

$= 0,9(\underbrace{U_n - 2500}_{= v_n})$

$v_{n+1} = 0,9\, v_n$

(v_n) suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de 1er terme $v_0 = U_0 - 2500 = 3000 - 2500 = 500$

b) $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = 500 \times 0,9^n$

$v_n = U_n - 2500$ doù $U_n = v_n + 2500$

$U_n = 500 \times 0,9^n + 2500$

3) $U_{n+1} - U_n = 500 \times 0{,}9^{n+1} + 2500 - (500 \times 0{,}9^n + 2500)$

$= 500 \times 0{,}9^{n+1} - 500 \times 0{,}9^n$

$= 500 \times 0{,}9^n (0{,}9 - 1)$

$= 500 \times 0{,}9^n \times \frac{-1}{10}$

$U_{n+1} - U_n = -50 \times 0{,}9^n \leq 0$

$U_{n+1} - U_n \leq 0$ (U_n) est décroissante.

4) capacité optimale d'accueil 2800 élèves.

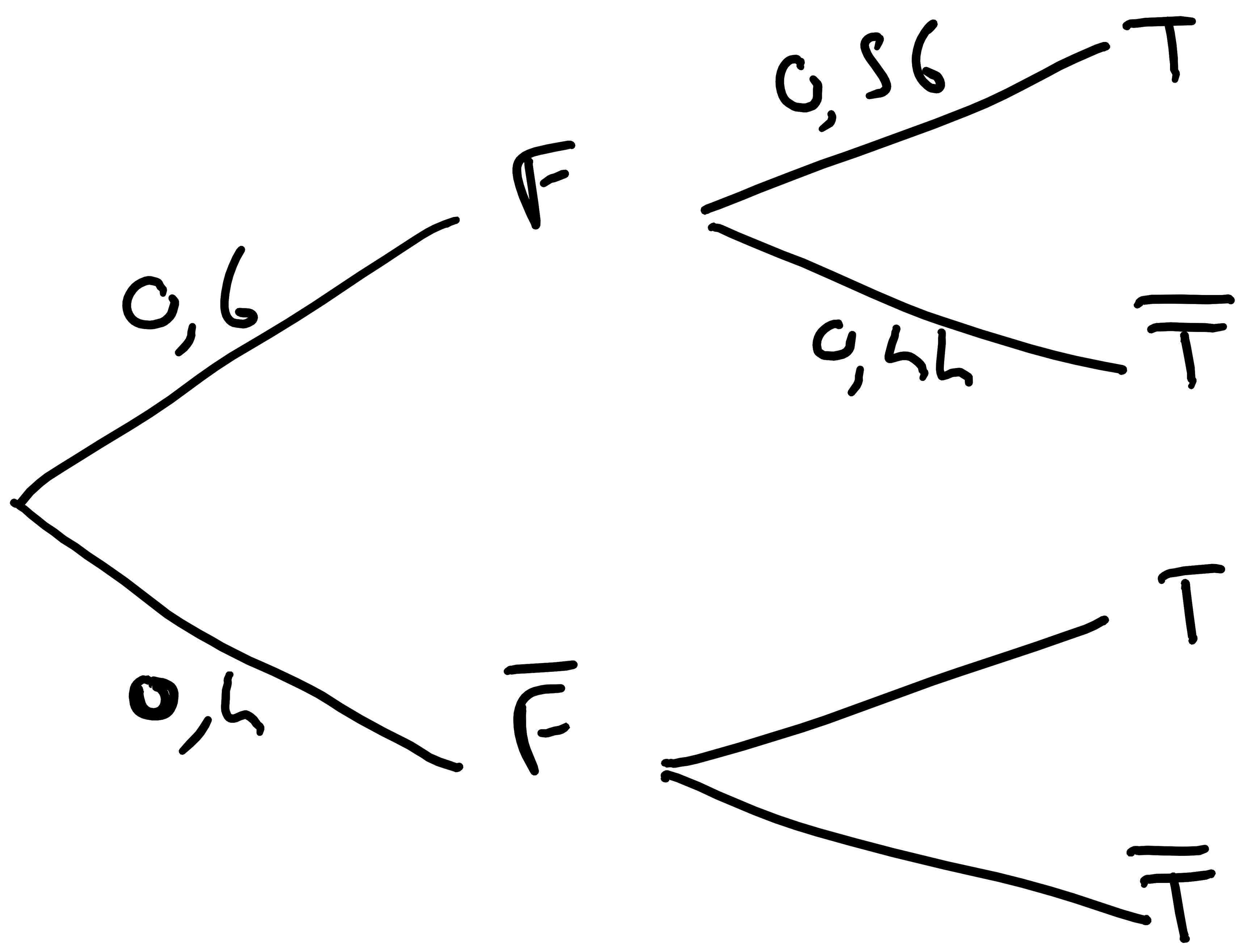
Initialisation : U prend la valeur 3000
N prend la valeur 0

Traitement : Tant que $U > 2800$
Affecter à N la valeur N+1
Affecter à U la valeur $0{,}9 \times U + 250$

Fin Tant que

Sortie Afficher N

Exercice IV :



F : "personne interrogée est 1 femme"

T : "personne interrogée travaille à temps partiel".

$$P(T) = 0,36.$$

$$P(T) = P(T \cap F) + P(T \cap \bar{F})$$

$$P(T \cap \bar{F}) = P(T) - P(T \cap F) = P(T) - P_F(T) \times P(F)$$

$$P(T \cap \bar{F}) = 0,36 - 0,6 \times 0,56 = 0,024.$$

On sait que la personne travaille à temps partiel

$$P_T(\bar{F}) = \frac{P(\bar{F} \cap T)}{P(T)} = \frac{0,024}{0,36}$$

$$P_T(\bar{F}) \simeq 0,067$$