Exercice 8 :

1) $n = 300$

fréquence observée : $f = \frac{225}{300} = 0,75$

$nf = 300 \times 0,75 = 225 \geq 5$

$n(1-f) = 300 \times 0,25 = 75 \geq 5$

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,75 - \frac{1}{\sqrt{300}} ; 0,75 + \frac{1}{\sqrt{300}} \right]$$

$$I = [0,692 ; 0,808].$$

réponse b

2) nombre inférieur à 10

$$P(4 \leq X \leq 10) = \frac{10-4}{11-4} = \frac{6}{7}$$

réponse d

3) $f(x) = (x+1)\, e^{-2x+3}$ $\mathbb{R}$.

$(uv)' = u'v + uv'$ et $(e^u)' = u'e^u$

$$f'(x) = 1 \times e^{-2x+3} + (x+1)(-2)e^{-2x+3}$$

$$= e^{-2x+3}(1 - 2x - 2) = (-2x-1)e^{-2x+3}$$

réponse d

4) La courbe représente f''

f convexe alors $\left|\begin{array}{l} f' \text{ est croissante} \\ f''(x) \geq 0. \end{array}\right.$

réponse C

point d'inflexion car $f''(1) = 0$ et f'' change de signe.

Exercice II :

1) 1er mars 2015 : 10.000 voitures.
vend 25 % de son parc chaque année
et rachète 3000 véhicules.

u_{n+1} = nb de véhicules l'année 2015 + (n+1)
u_n = ———————————————— 2015 + (n)

il vend 25 % de son parc : $\left(1 - \frac{25}{100}\right) u_n = 0,75 u_n$

il achète 3000 véhicules : + 3000.

$$u_{n+1} = 0,75 u_n + 3000$$

2) $v_n = u_n - 12000$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 12000$

$$= 0,75 u_n + 3000 - 12000$$

$$= 0,75 u_n - 9000 = 0,75 \left(u_n - \frac{9000}{0,75} \right)$$

$$= 0,75 (\underbrace{u_n - 12000}_{= v_n})$$

$$v_{n+1} = 0,75 v_n$$

(v_n) suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de

1er terme $v_0 = u_0 - 12000 = 10000 - 12000 = -2000$

b) $v_n = v_0 \times q^n$

$v_n = -2000 \times (0,75)^n$

$\lim_{+\infty} v_n = ?$

$0 < 0,75 < 1$ donc $\lim_{+\infty} v_n = 0$.

c) $v_n = u_n - 12000$

$u_n = v_n - 12000 = -2000 \times 0,75^n + 12000$

d) $\lim_{+\infty} v_n = 0$

$\lim_{+\infty} u_n = 12000$.

Au bout d'un grand nombre d'années, le parc automobile de ce loueur comptera 12000 véhicules.

3) parc comptera au moins 11950 véhicule

a) Initialisation : U prend la valeur 10000
N prend la valeur 0

Traitement Tant que $U < 11950$
N prend la valeur N+1
U prend la valeur 0,75U + 3000
Fin Tant Que

Sortie Affiche N

b) A la calculatrice on trouve

$$n = 13$$

En 2028, le parc automobile comptera au moins 11950 véhicules.

c) $u_n \geq 11950$

$$-2000 \times 0,75^n + 12000 \geq 11950$$

$$\Leftrightarrow \quad -2000 \times 0,75^n \geq -50$$

$$\Leftrightarrow \quad 2000 \times 0,75^n \leq 50$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,75^n \leq \frac{50}{2000} = \frac{5}{200} = \frac{1}{40}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(0,75)^n \leq \ln\left(\frac{1}{40}\right) = -\ln(40)$$

{ "ln" croissante sur $]0;+\infty[$ et $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ }

$$\Leftrightarrow \quad n \ln 0,75 \leq -\ln(40) \quad (\ln a^n = n \ln a)$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{-\ln(40)}{\ln(0,75)} \quad (\ln 0,75 < 0)$$

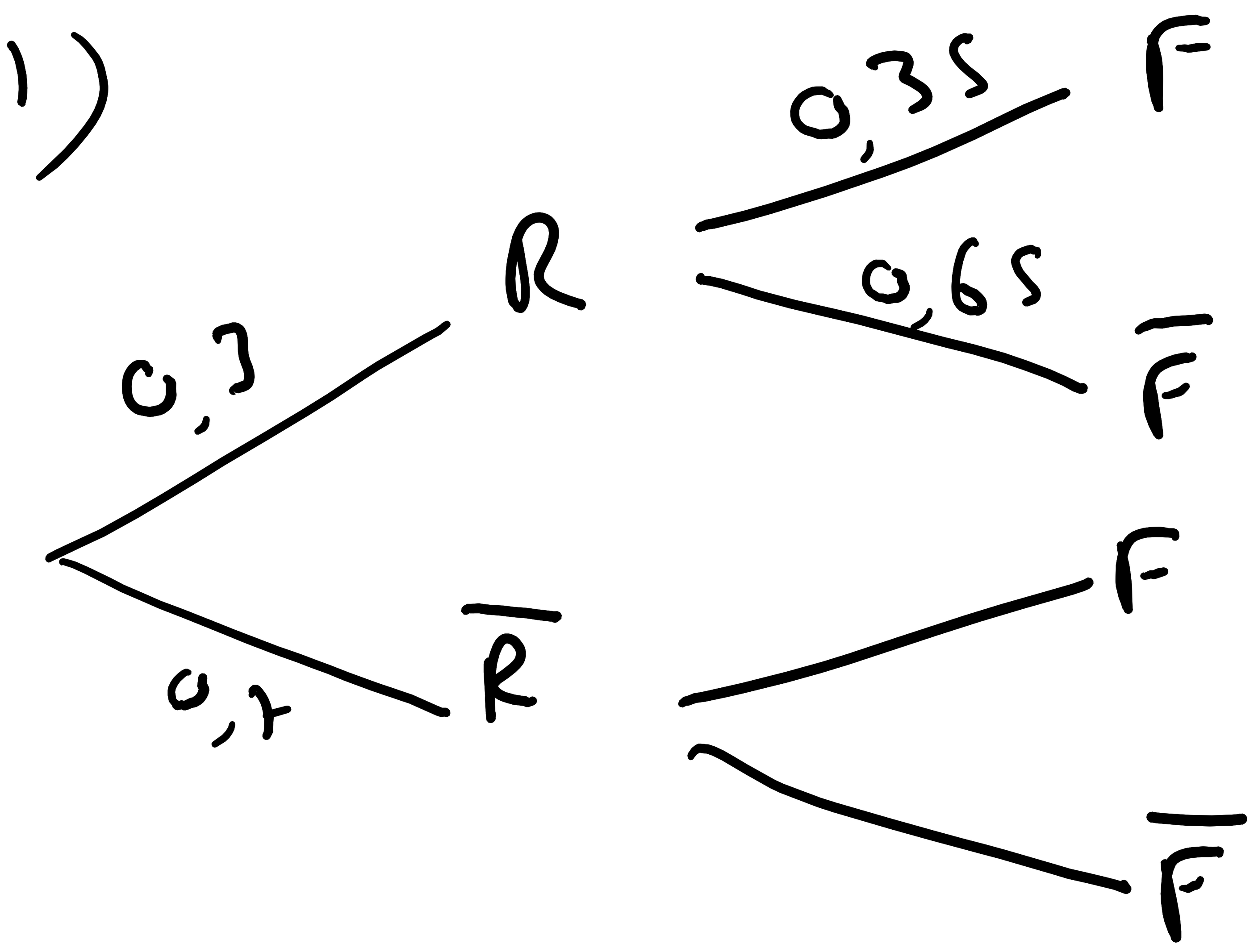
$$\Leftrightarrow \quad n \geq 12,82 \quad \text{soit } n \geq 13$$

On retrouve le résultat de 3) b).

Exercice III :

Partie A :

1)



$P(R) = 0,3$

$P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 0,7$

2) $P_R(F) = 0,35$ 35% chansons rock sont interprétées en français

3) $P(R \cap F) = ?$ $P_R(F) = \dfrac{P(F \cap R)}{P(R)}$

donc $P(F \cap R) = P_R(F) \times P(R)$

$P(F \cap R) = 0,35 \times 0,3 = 0,105.$

4) $P(F) = P(F \cap R) + P(F \cap \overline{R})$ (probabilité totale).

$P(F) - P(F \cap R) = P(F \cap \overline{R})$

$P(F \cap \overline{R}) = 0,385 - 0,105 = 0,28$

38,5% des chansons sont interprétées en français

$P(F \cap \overline{R}) = 0,28.$

5) $P_{\overline{R}}(F) = \dfrac{P(F \cap \overline{R})}{P(\overline{R})}$

$= \dfrac{0,28}{0,7} = 0,4$

40 % des chansons des catégories différentes du rock sont interprétées en français.

Partie B :

X variable aléatoire qui associe la durée en min.

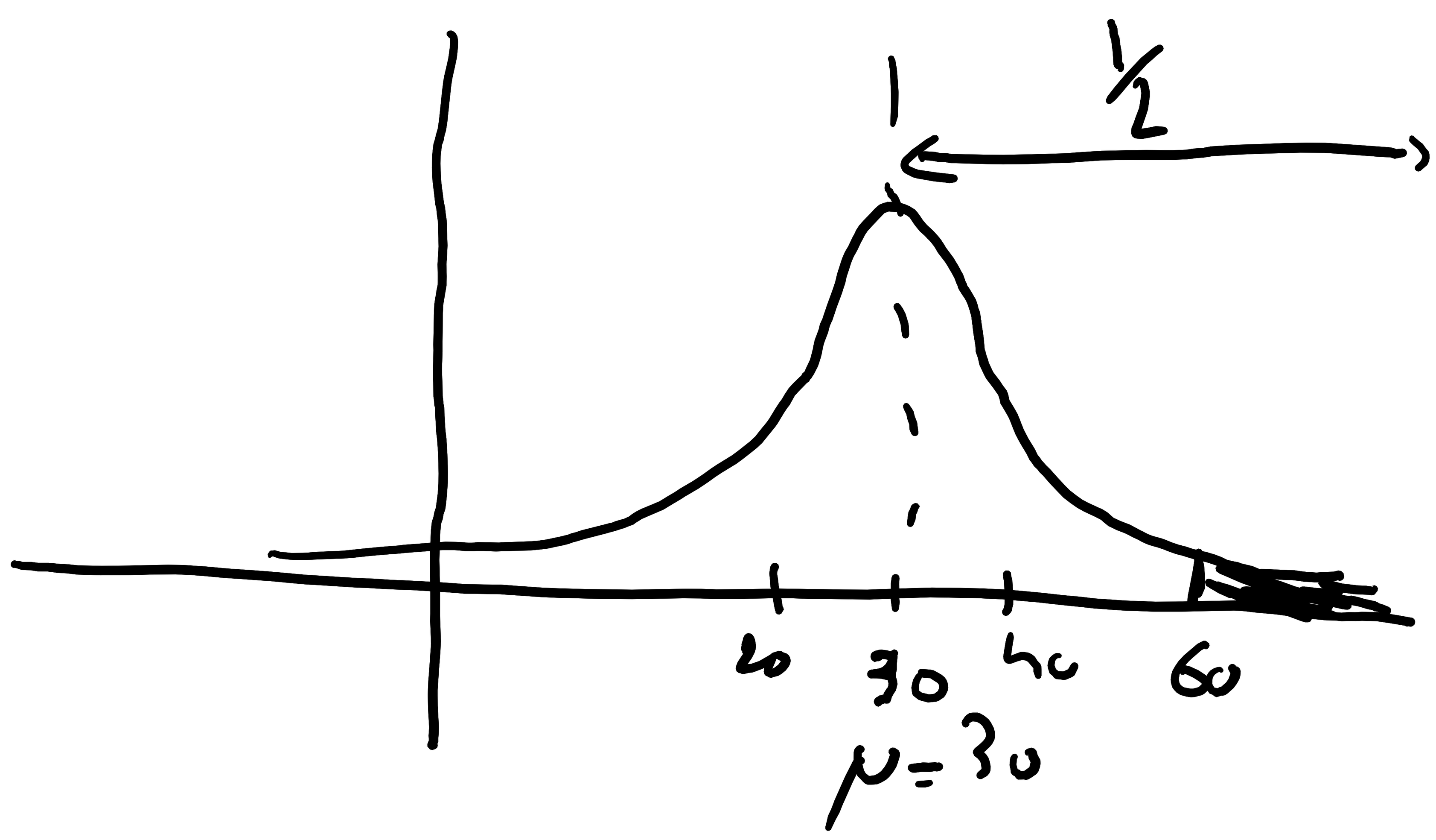
X suit 1 loi normale $\mu = 30$ et $\sigma = 10$.

1) $P(15 \leq X \leq 45) = ?$

À la calculatrice on trouve :

$P(15 \leq X \leq 45) \simeq 0,866$.

2) $P(X \geq 60) = ?$



$P(X \geq 60) = \frac{1}{2} - P(30 \leq X \leq 60)$

$P(X \geq 60) = 0,001$.

Exercice IV :

Partie A :

1) $f'(1,5)=0$ (tangente horizontale).

2) La tangente passe par les points $A(1,3)$ et $B(0,2)$

coeff directeur : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-3}{0-1} = 1$.

$a = 1$ $(f'(1)=1)$.

$T : y = 1x + b$

$B \in T$: $y_B = x_B + b$ donc $b = 2$

Equation tangente T au point A est :

$y = x + 2$

3) Encadrement aire $\mathcal{C}$, $y=0$, $x=1$ et $x=2$

$$3 \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq 4$$

(nb de carreaux de côté 1)

4) La courbe est en dessous des 2 tangentes sur l'intervalle, f est concave sur $[0,5;6]$

Partie B :

1) $I = [0,5 ; 6]$ $\quad f(x) = -2x + 5 + 3\ln x$

f est dérivable sur $[0,5 ; 6]$

$$f'(x) = -2 + \frac{3}{x} = \frac{-2x+3}{x}$$

2) $I = [0,5 ; 6]$ $\quad x > 0$

signe de $f'(x)$ = signe de $(-2x+3)$

$-2x + 3 = 0 \quad x = \frac{3}{2}$ $\quad + \; 0 \; -$ (en $\frac{3}{2}$)

x	$0,5$		$\frac{3}{2}$		α		6
$f'(x)$		$+$	0		$-$		
$f(x)$	$f(\frac{1}{2})$	$\nearrow$ $\oplus$	$f(\frac{3}{2})$	$\searrow$ $\oplus$	0	$\searrow$ $\ominus$	$f(6)$

$f(\frac{1}{2}) \approx 1,92 > 0$

$f(\frac{3}{2}) \approx 3,22 > 0$

$f(6) \approx -1,63 < 0$

3) * $[0,5 ; \frac{3}{2}]$ $\quad f$ continue et croissante strictement

$f(\frac{1}{2}) > 0$ et $f(\frac{3}{2}) > 0$ $\quad$ pas de solution.

* $[\frac{3}{2} ; 6]$, f continue et strictement décroissante

$f(\frac{3}{2}) > 0$ et $f(6) < 0$. D'après le TVI,

$0 \in [f(6) ; f(\frac{3}{2})]$, il existe un unique $\alpha \in [\frac{3}{2} ; 6]$

tel que $\underline{f(\alpha) = 0}$ $\quad f(x) = 0$ admet l'unique solution

A la calculatrice on trouve : $\alpha \approx 4,88$ à 10^{-2} près.

4) • $x \in \left[\frac{1}{2} ; \alpha\right[$ $\quad f(x) > 0$.

• $x = \alpha$ $\quad f(x) = 0$

• $x \in \left]\alpha ; 6\right]$ $\quad f(x) < 0$.

5) $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln x$

a) F est une primitive de f alors $F' = f$.

$$F'(x) = -2x + 2 + 3\ln x + 3x \times \frac{1}{x}$$
$$= -2x + 2 + 3\ln x + 3$$
$$= -2x + 5 + 3\ln x = f(x)$$

F est une primitive de f.

b) $\int_1^2 f(x)dx = \left[F(x)\right]_1^2 = F(2) - F(1)$

$F(2) = -4 + 4 + 6\ln 2 = 6\ln 2$

$F(1) = -1 + 2 = 1$

$\int_1^2 f(x)dx = 6\ln 2 - 1$ u.a.

$\int_1^2 f(x)dx = 3{,}2$ u.a arrondi en dixième.