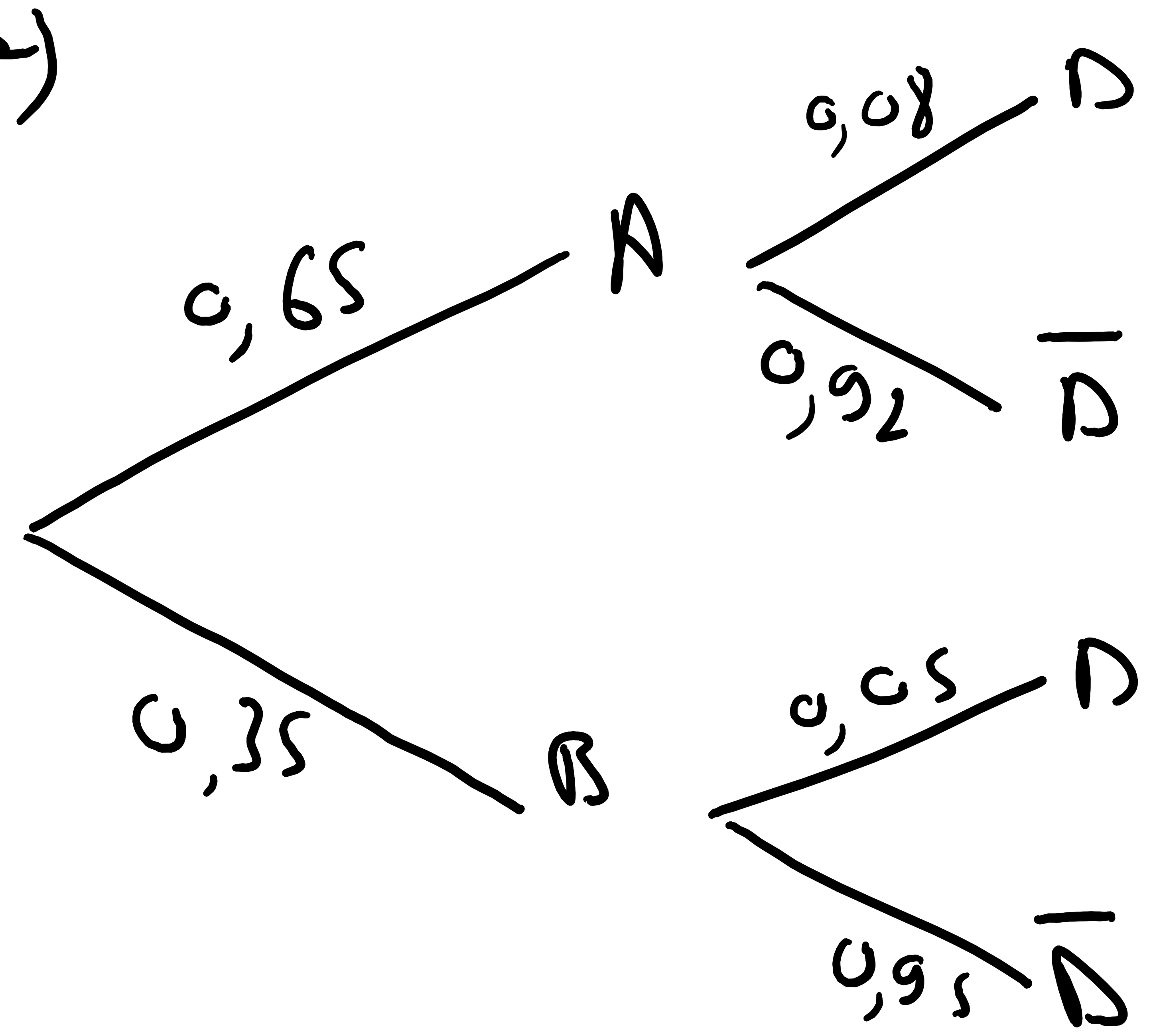
Exercice 2 :

Partie A :

1) a)



b) $P(\bar{D}) = P(A \cap \bar{D}) + P(B \cap \bar{D})$

$= P(A) \times P_A(\bar{D}) + P(B) \times P_B(\bar{D})$

$= 0,65 \times 0,92 + 0,35 \times 0,95$

$= 0,9305$

c) on prend tiré sans défaut.

On cherche $P_{\bar{D}}(A) = ?$

$$P_{\bar{D}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(A) \times P_A(\bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{0,65 \times 0,92}{0,9305} \approx 0,6427. \ (10^{-4} \text{ près}).$$

2) on prélève 10 ampoules.

2 issues $\begin{cases} \to \text{sans défaut } \overline{D} \\ \to \text{avec défaut } D \end{cases}$

$P(\overline{D}) = 0{,}9305 = p$. $\quad q = 1 - p = 0{,}0695$

Loi Binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}9305$

$X \sim \mathcal{B}(10 ; 0{,}9305)$.

$$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$= \binom{10}{9} p^9 \times (1-p)^{10-9} + \binom{10}{10} p^{10} \times (1-p)^{10-10}$$

$$= 10 \times 0{,}9305^9 \times 0{,}0695^1 + 1 \times 0{,}9305^{10} \times 0{,}0695^0$$

$$\approx 0{,}3634 + 0{,}4866$$

$$P(X \geq 9) \approx 0{,}85$$

Partie B :

1) a) $P(T \geq a) = 1 - P(T \leq a)$

$$= 1 - \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= 1 + \int_0^a \underbrace{(-\lambda)}_{u'} e^{-\lambda x}\, dx$$

$u' e^u \xrightarrow{\text{Primitive}} e^u$

$$= 1 + \left[e^{-\lambda x}\right]_0^a = 1 + e^{-\lambda a} - e^{-\lambda 0}$$

$$= 1 + e^{-\lambda a} - 1$$

$$P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$$

b) $$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = \frac{P((T \geq t) \cap (T \geq t + a))}{P(T \geq t)}$$

$$= \frac{P(T \geq t + a)}{P(T \geq t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda a}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= e^{-\lambda a} = P(T \geq a).$$

2) T suit une loi exponentielle d'espérance 10.000

a) $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ donc $\lambda = \frac{1}{E(T)}$

$\lambda = \frac{1}{10.000}$ soit $\lambda = 10^{-4}$.

b) $P(T \geq 5000) = e^{-\lambda a}$

$= e^{-\lambda \times 5000} = e^{-10^{-4} \times 5 \times 10^{3}}$

$= e^{-0,5}$

$P(T \geq 5000) \approx 0,6065$

c) $P_{T \geq 7000}(T \geq 12000) = P_{T \geq 7000}(T \geq 7000 + 5000)$

$= P(T \geq 5000)$.

question 1)b) partie B

donc $P_{T \geq 7000}(T \geq 12000) \approx 0,6065$.

Partie C :

1) $n = 1000 \geq 30$ $\quad p = 0,06$ (6% ampoules défectueuses).

$np = 1000 \times 0,06 = 60 \geq 5$

$n(1-p) = 1000 \times 0,94 = 940 \geq 5$

les conditions sont réunies

$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = [0,0452 ; 0,07$

2) fréquence observée $f = \frac{71}{1000} = 0,071$

$f \in I$, donc on ne peut pas remettre en cause l'affirmation.

Exercice II :

1) $|z - 2| = 1$

On pose $z_A = 2$ (A a pour coordonnée $A(2,0)$)

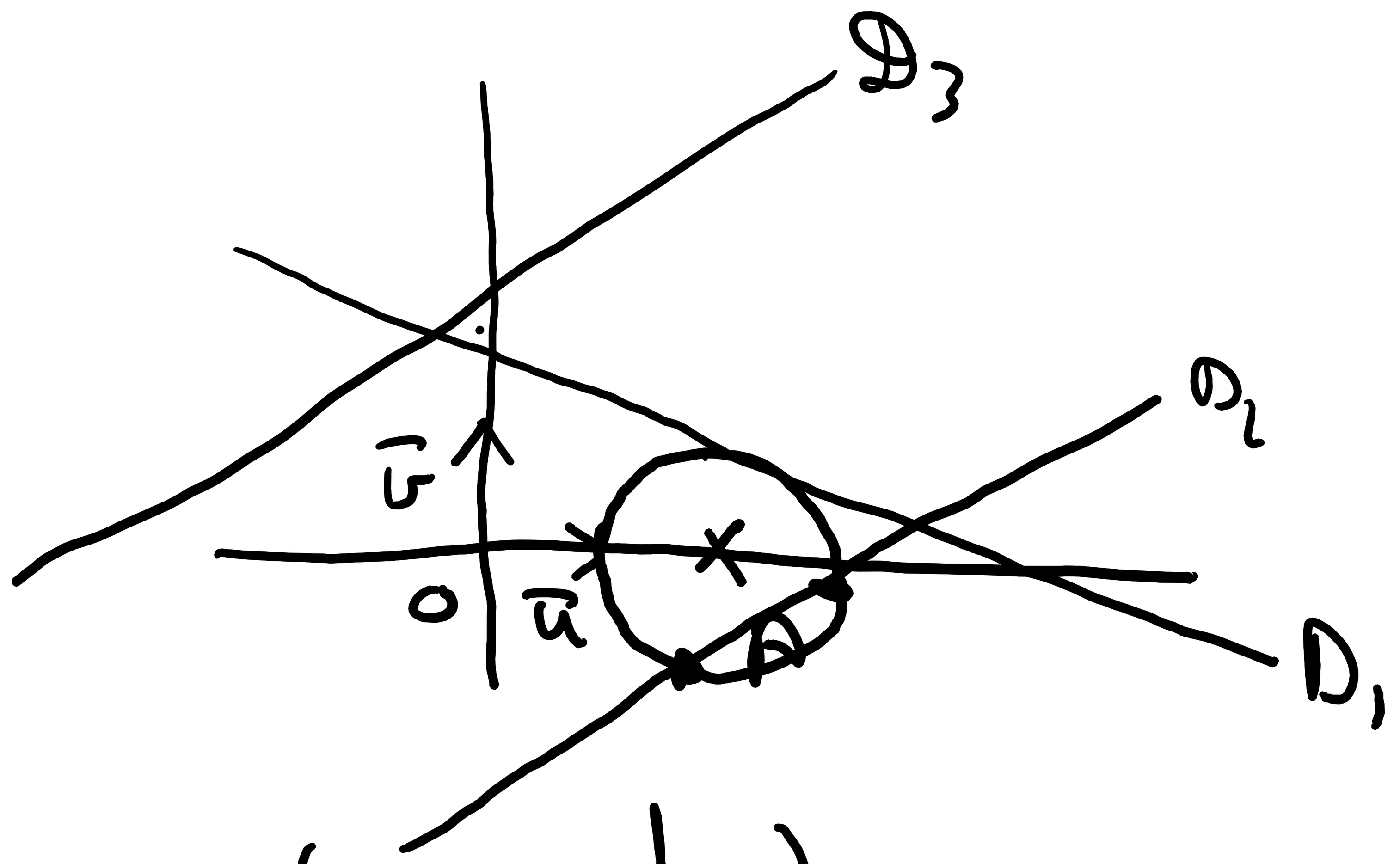
M a pour affixe z

A a pour affixe z_A

$$|z - 2| = |z - z_A| = AM = 1$$

C'est un cercle de centre A et de rayon 1.

2) $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$.



(exemple)

nb de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$:

* 0 point
* 1 point
* 2 points

$M \in \mathcal{D}$ M a pour coordonnées : $M(x, ax)$

$M \in \mathcal{C}$ $(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 1$

$M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$: $(x - 2)^2 + (ax)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + a^2x^2 = 1$

$\Leftrightarrow (1 + a^2)x^2 - 4x + 3 = 0$

Equation du 2nd degré ; $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-4)^2 - 4\left((1 + a^2) \times 3\right)$$
$$= 16 - 12(1 + a^2) = 4 - 12a^2$$

Rappel : équation cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon R

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$\Delta = 4(1-3a^2)$$

Discussion :

$\underline{\Delta = 0}$: $1 - 3a^2 = 0$

$1 = 3a^2$

$\frac{1}{3} = a^2$

donc $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

si $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont <u>1 point</u> commun

$\underline{\Delta < 0}$: si $a \in \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3} ; +\infty\right[$

alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ n'ont <u>pas</u> de point commun.

$\underline{\Delta > 0}$: si $a \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$

alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont <u>deux</u> points communs

Exercice III :

Partie A :

1) $f(x) = x e^{1-x^2} = x e \times e^{-x^2} = \frac{x e}{e^{x^2}}$

limite de f en $+\infty$.

$$f(x) = \frac{x}{e^{x^2}} \times e = \frac{x^2}{e^{x^2}} \times \frac{e}{x}$$

Car $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$

donc $\lim\limits_{+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$

De même $\lim\limits_{+\infty} \frac{e}{x} = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$. $y = 0$ asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

2) a) $f'(x) = ?$ $\quad (e^u)' = u' e^u$ et $(uv)' = u'v + uv'$

$$f'(x) = 1 e^{1-x^2} + x(-2x) e^{1-x^2}$$
$$= e^{1-x^2}(1 - 2x^2)$$

b) signe de $f'(x)$ = signe de $(1 - 2x^2)$

car $e^u > 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0$ donc $x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Signe $(1-2x^2)$

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	$-$	0	$+$	0	$-$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$	0

Admis $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0$

$$\begin{cases} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{1-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{0,5} \\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{0,5} \end{cases}$$

Partie B :

1) Conjecture : la courbe $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$.

2) $x \in]-\infty ; 0]$ $\quad f(x) < g(x) \quad g(x) = e^{1-x}$

$$g(x) > 0$$

$$f(x) = x e^{1-x^2} \leqslant 0$$

Donc sur $]-\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.

3) a) $x > 0$.

$$f(x) \leq g(x)$$

$$\Leftrightarrow x e^{1-x^2} \leq e^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{e^{1-x}}{e^{1-x^2}} = e^{1-x-(1-x^2)}$$

$$\Leftrightarrow x \leq e^{x^2-x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \leq \ln\left(e^{x^2-x}\right)$$ ("ln" croissante sur $]0;+\infty[$)

$$\Leftrightarrow \ln x \leq x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x^2 + x \leq 0$$

$$\Phi(x) \leq 0$$

b) $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$ $\quad x \in]0;+\infty[$.

$$\Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1$$

$$= \frac{1 - 2x^2 + x}{x} = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}$$

signe de $\Phi'(x)$ = signe de $(-2x^2 + x + 1)$

$-2x^2 + x + 1 = 0$ $\quad \Delta = 9$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$

x		$-\frac{1}{2}$		1	
signe de $(-2x^2+x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\ominus$ $\nearrow$	0	$\searrow$ $\ominus$	

$$\Phi(1) = \ln 1 - 1^2 + 1 = 0$$

c) $\forall x \in \,]0\,;+\infty[\quad \Phi(x) \leq 0.$

4) a) Conjecture exacte car :

* si $x \in \,]-\infty\,;0]$, $f(x) \leq g(x)$
* si $x \in \,]0\,;+\infty[\quad \Phi(x) \leq 0$ soit $f(x) \leq g(x)$

b) $\Phi(1) = 0 \qquad f(1) = g(1)$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun

$I(1\,;f(1)) \qquad \underline{I(1,1)}$

c) coefficients directeurs : $f'(1)$ et $g'(1)$

$f'(1) = -1$

$g'(x) = -e^{1-x}$ et $g'(1) = -e^0 = -1$

$f'(1) = g'(1)$, même coefficients directeur

les deux passent par A, elles sont confondues.

Partie C :

1) $f(x) = x e^{1-x^2} = \frac{-1}{2}\underbrace{(-2x) e^{1-x^2}}_{\text{forme } u'e^u}$

primitive e^u

$F(x) = -\frac{1}{2} e^{1-x^2}$

2) $\int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^1 (e^{1-x} - x e^{1-x^2})\, dx$

$= \int_0^1 e^{1-x}\, dx - \int_0^1 x e^{1-x^2}\, dx$

~~Une~~ primitive de g est :
$G(x) = -e^{1-x}$.

$\int_0^1 [g(x) - f(x)]\, dx = [-e^{1-x}]_0^1 - [-\frac{1}{2} e^{1-x^2}]_0^1$

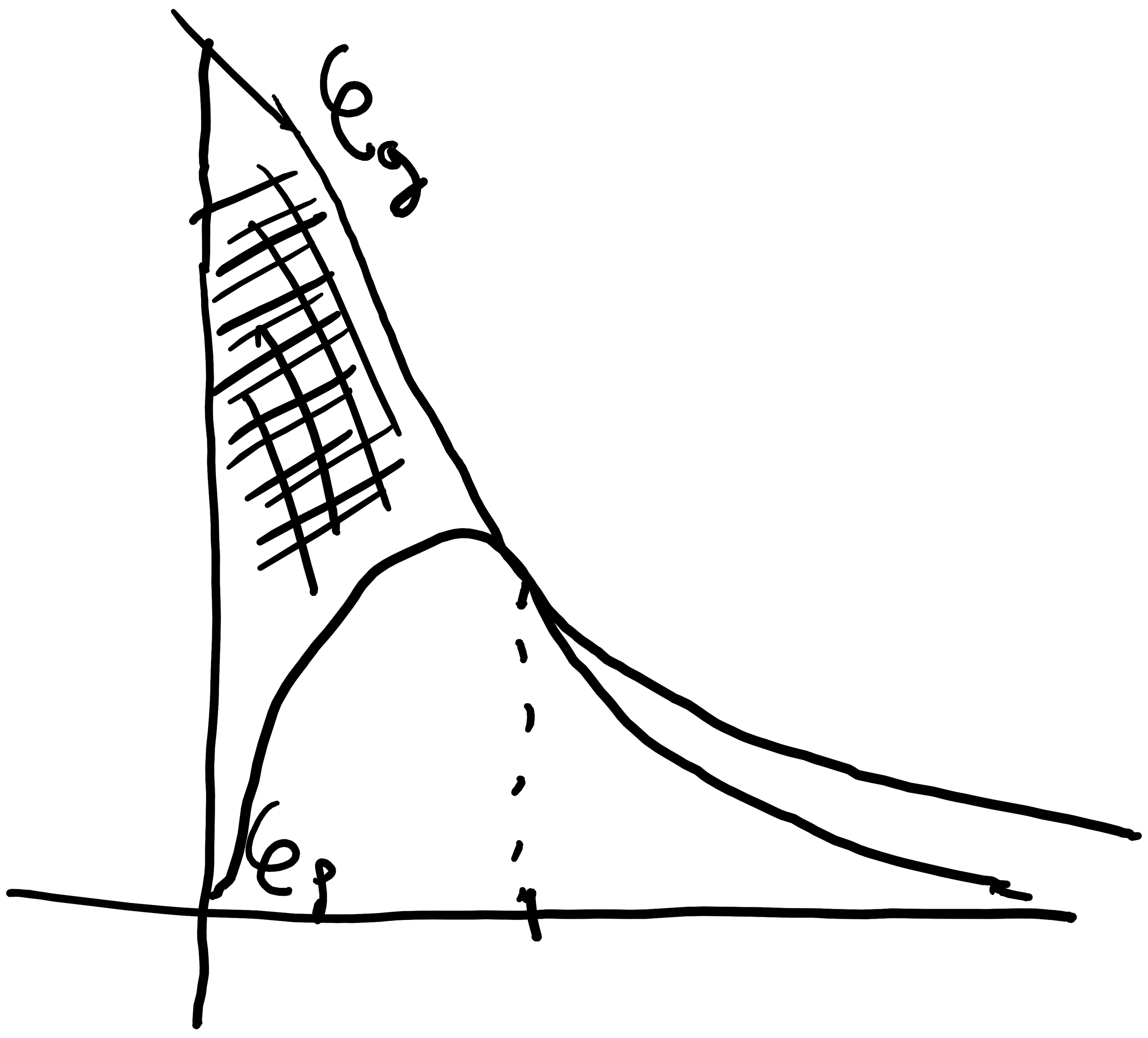
$= -e^0 + e^1 - (-\frac{1}{2} e^0 + \frac{1}{2} e)$

$= -e^0 + e + \frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e$

$= -1 + e + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e = \underline{\frac{1}{2}(e-1)}$

3) $\int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx$ = Aire entre $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.



Exercice IV :

1) a) $\overrightarrow{DF}$ normal à (BGE)

$D(0,0,0)$
$F(1,1,1)$ $\qquad \overrightarrow{DF}(1,1,1)$

$\overrightarrow{BG}(0,-1,1)$ $\qquad B(1,1,0)$

$\overrightarrow{BE}(-1,0,1)$ $\qquad G(1,0,1)$

$E(0,1,1)$

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = 0-1+1 = 0$$

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = -1+0+1 = 0$$

$\overrightarrow{DF}$ orthogonal à $\overrightarrow{BG}$ et à $\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BE}$ non colinéaires

donc $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (BGE)

b) le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (BGE)
donc $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

$\left(\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \quad ax+by+cz+d=0\right)$

$1x+1y+1z+d=0$ et $I\left(\frac{1}{2},1,0\right)$

$I\in\mathcal{P} \qquad x_I + y_I + z_I + d = 0$

$\frac{1}{2}+1+d=0$ soit $d=\frac{-3}{2}$

L'équation de $\mathcal{P}$ est :

$$x + y + z - \frac{3}{2} = 0$$

2) N milieu de [AE].

N appartient à l'arête [AE] par hypothèse

N a pour coordonnées : $N(0, 1, z_N)$

$N \in \mathcal{P}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{P}$:

$$x_N + y_N + z_N - \frac{3}{2} = 0$$

$$1 + z_N - \frac{3}{2} = z_N - \frac{1}{2} = 0$$

$$z_N = \frac{1}{2}$$

$N\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ donc N milieu [AE].

3) a) représentation paramétrique de (HB)

$B(1, 1, 0)$
$H(0, 0, 1)$

$\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (H

$H \in (AB)$

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b) (HB) et (P) sécants.

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1+1-1 = 1 \neq 0$$

P et (HB) sont sécants.

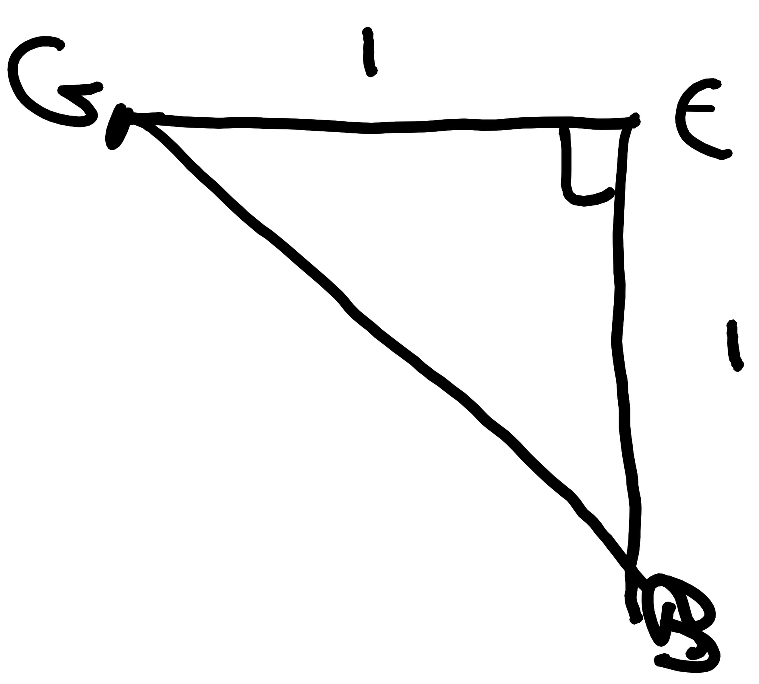
$$\begin{cases} x + y + z - \frac{3}{2} = 0 \\ x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$t + t + (1-t) - \frac{3}{2} = 0$$

$$t + 1 - \frac{3}{2} = t - \frac{1}{2} = 0 \text{ donc } \underline{t = \frac{1}{2}}$$

T a pour coordonnées : $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

$T\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

4) 

$\mathcal{A}_{D \text{ rectangle en } E} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}.$

$V = \frac{1}{3} \text{base} \times \underbrace{\text{hauteur}}_{= FE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 =$