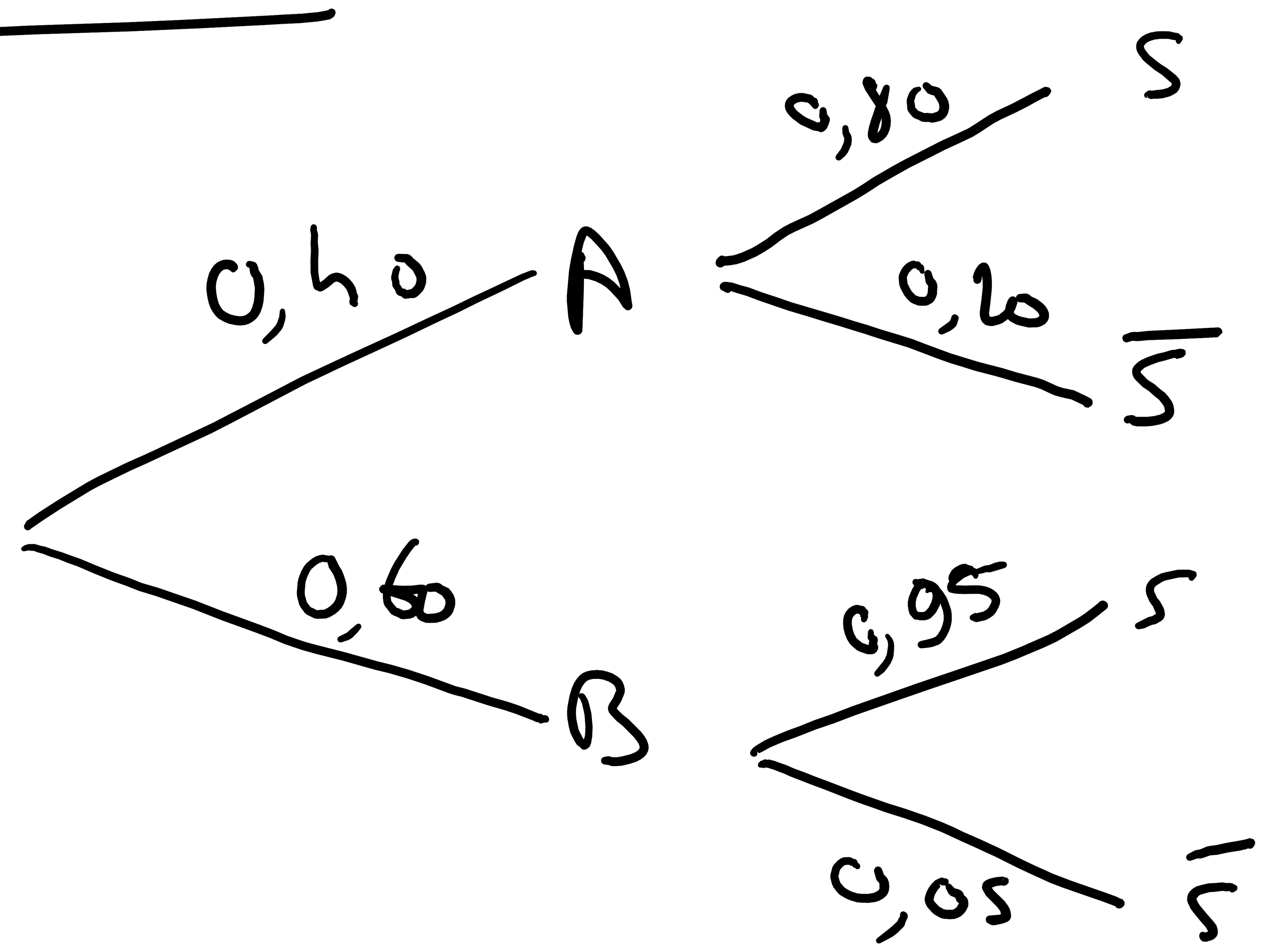
Exercice 2 :

Partie A :



1) $P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S)$

$= P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_S(B)$

$= 0,40 \times 0,80 + 0,6 \times 0,95$

$= 0,89.$

2) Pas de défaut

On cherche $P_S(A) = ?$

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A) \times P_A(S)}{P(S)}$$

$$P_S(A) = \frac{0,4 \times 0,8}{0,89} \approx 0,36.$$

Partie B :

1) intervalle de confiance

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

$n = 400 \geq 30$

fréquence observée $f = 0,92$

$nf = 400 \times 0,92 = 368 \geq 5$

$n(1-f) = 400 \times 0,08 = 32 \geq 5$

$$I = \left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{400}} ; 0,92 + \frac{1}{\sqrt{200}}\right]$$

$$I = [0,87 ; 0,97]$$

2) Amplitude : $f + \frac{1}{\sqrt{n}} - f + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$

$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,02$ donc $\frac{2}{0,02} \leq \sqrt{n}$

$100 \leq \sqrt{n}$ d'où $n = 10.000$

La taille minimale de l'échantillon doit donc être d'au moins 10.000 individus.

Partie C :

1) a) $P(T \leq a)$ $\quad a > 0$

$$P(T \leq a) = \int_0^a f(x)\,dx$$

= aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

b) $P(T \leq t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

$\underbrace{(-\lambda)}_{u'}\underbrace{e^{-\lambda x}}_{e^u}$

$u' e^u \xrightarrow[\text{primitive}]{} e^u$

$$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} + e^{-\lambda 0}$$

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} -\lambda t = -\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leq t) = 1$.

2) $P(T \leq 7) = 0,5$

$$P(T \leq 7) = 1 - e^{-\lambda 7} = 0,5$$

$e^{-\lambda 7} = 0,5$ d'où $-7\lambda = \ln 0,5$

donc $\lambda = \dfrac{\ln 0,5}{-7}$ $\quad \lambda \approx 0,099$.

3) $\lambda = 0{,}099$

a) $P(T \geq 5) = 1 - P(T < 5)$

$= 1 - (1 - e^{-5\lambda})$

$= e^{-5\lambda}$

$= e^{-5 \times 0{,}099}$

$P(T \geq 5) \approx 0{,}61.$

b) Composant fonctionne au bout de 2 ans

$P_{T\geq 2}(T \geq 7) = P_{T \geq 2}(T \geq 5+2)$

$= P(T \geq 5)$

$P_{T\geq 2}(T \geq 7) = P(T \geq 5) \approx 0{,}61$

c) $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}099} \approx 10{,}1.$

$E(T) = 10$ (arrondi à l'unité)

La durée de vie moyenne de ce composant est de 10 ans.

Exercice II :

* **Affirmation 1 :**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\0-2\\1-3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-1\\0-2\\1-3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires alors $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = k(-2) \text{ donc } k = -1 \\ -2 = k(-2) \text{ donc } k = 1 \end{array}\right\} \text{impossible}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires
Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

* **Affirmation 2 :**

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} = 0-2+2 = 0$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix} = 0-2+2 = 0$$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ (2 vecteurs non colinéaires)
$\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs du plan (ABC) donc il est normal à ce plan.

* Affirmation 3 :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -2+1 \\ -3+2 \\ 4-3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0-1-1 = -2 \neq 0.$$

$\vec{n}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas orthogonaux.

(EF) et (ABC) sont sécants.

I milieu de [BC]

$$I \begin{cases} x_I = \frac{3-1}{2} = 1 \\ y_I = 0 \\ z_I = \frac{1+1}{2} = 1 \end{cases}$$

$I(1, 0, 1)$, I appartient au plan (ABC)

Vérifions I appartient à (EF).

représentation paramétrique de (EF)

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$\underline{t = -2}$

$$\begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = -2 + 2 = 0 \\ z = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

$I \in (EF)$.

Affirmation 4 :

$$(AB) \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(CD) : vecteur directeur $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$(CD) \quad \begin{cases} x = -1 + 3t' \\ y = 0 + t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases}$$

si (AB) et (CD) sécantes alors :

$$\begin{cases} 1 + 2t = -1 + 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 3 - 2t = 1 - 2t' \end{cases} \quad \text{donc } t' = 2 - 2t$$

$$\begin{cases} 1 + 2t = -1 + 3(2 - 2t) = -1 + 6 - 6t \\ 3 - 2t = 1 - 2(2 - 2t) = 1 - 4 + 4t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 2t = 5 - 6t \\ 3 - 2t = -3 + 4t \end{cases} \quad \begin{cases} 8t = 4 \text{ soit } t = 1/2 \\ 6t = 6 \text{ soit } t = 1 \end{cases}$$

$t = \frac{1}{2}$ et $t = 1$ impossible

Les droites ne sont pas sécantes.

Exercice IV :

1) $f(x) = x$

$$x - \ln(x^2+1) = x$$

$$\ln(x^2+1) = 0 = \ln 1$$

donc $x^2 + 1 = 1$ $\quad (\ln a = \ln b \iff a = b)$.

$$x^2 = 0$$

Donc $\underline{x = 0}$

L'équation $f(x) = x$ a une solution $x = 0$.

2) $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\quad \left((\ln u)' = \dfrac{u'}{u}\right)$.

$$= \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)}$$

$f'(1) = 0$

$\left.\begin{array}{l} x^2+1 > 0 \\ (x-1)^2 \geq 0 \end{array}\right\}$ $f'(x) \geq 0$.

f est croissante.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$ ADMIS.

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = ??$

$\lim\limits_{-\infty} (x^2+1) = +\infty$

$\lim\limits_{-\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{-\infty} [-\ln(x^2+1)] = -\infty$

$\lim\limits_{-\infty} x = -\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$

3)

	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$

$f(0) = 0 - \ln 1 = 0$

$f(1) = 1 - \ln 2 \ (\approx 0{,}307)$

$0 \leq x \leq 1$

donc $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ f est croissante sur $[0,1]$

$0 \leq f(x) \leq 0{,}307 \leq 1.$

Donc $0 \leq f(x) \leq 1.$

4) a) cet algorithme donne la valeur n à partir de laquelle $f(N) \geq A$.

b) $A = 100$ à la calculatrice $f(109) \approx 99{,}6$ et $f(110) \approx 100{,}6$ donc $\underline{N = 110}$

Partie B :

$$u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$$

1) Init : $u_0 = 1$ vrai

Hérédité : $0 \leq u_n \leq 1$

Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$?

$$0 \leq u_n \leq 1$$

$$u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$$

On sait que si $x \in [0;1]$ alors $f(x) \in [0;1]$

donc $u_{n+1} \in [0;1]$.

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.

2) $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$

$u_n^2 \geq 0$ donc $u_n^2 + 1 \geq 1$ d'où $\ln(u_n^2 + 1) \geq 0$

donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$

La suite (u_n) est décroissante.

3) $\left.\begin{array}{l} 0 \leq u_n \\ (u_n) \text{ est décroissante} \end{array}\right\}$ donc u_n converge

4) $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$

$\lim\limits_{+\infty} u_{n+1} = \ell$

$$u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$$

$$\ell = \ell - \ln(\ell^2 + 1)$$

$$\ell = f(\ell).$$

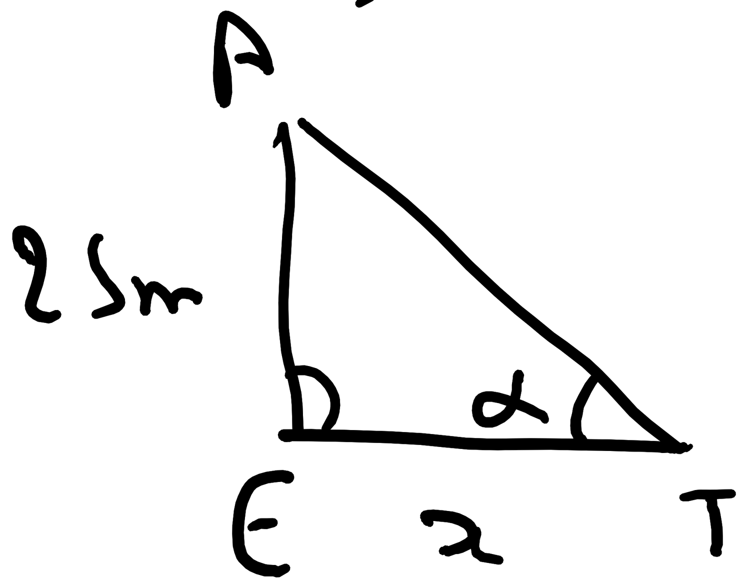
On déduit ℓ.

$f(x) = x$ alors $x = 0$ (partie A)

Donc $\underline{\ell = 0}$

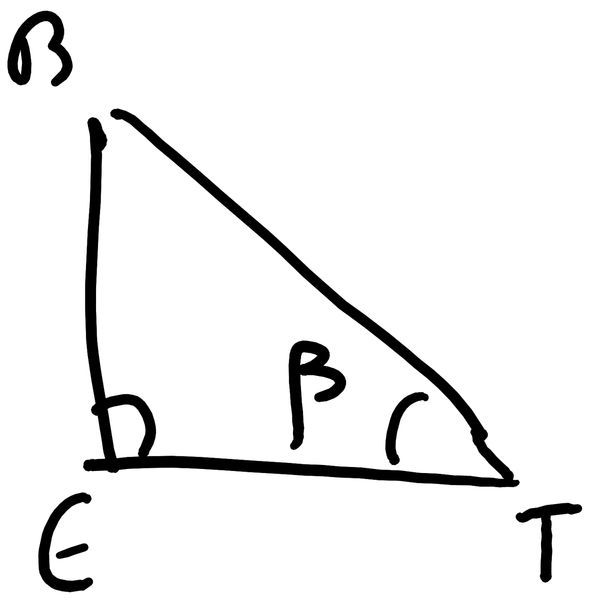
Exercice IV :

1)



$$\tan = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan \alpha = \frac{AE}{ET} = \frac{25}{x}$$



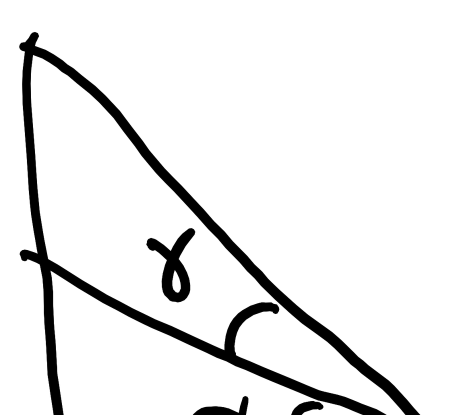
$$\tan \beta = \frac{EB}{ET} = \frac{EA+AB}{ET}$$

$$\tan \beta = \frac{25+5,6}{x} = \frac{30,6}{x}$$

2) tan est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ donc la fonction "tan" est croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

3)



$$\tan(\beta-\alpha) = \tan\gamma = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\alpha\times\tan\beta}$$

$$\tan(\beta-\alpha) = \tan\gamma = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6\times 25}{x^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}(30,6-25)}{\frac{1}{x^2}(x^2+30,6\times 25)} = \frac{5,6x}{x^2+765}.$$

4) $f(x) = x + \frac{765}{x} = \frac{x^2+765}{x}$ $\left(= \frac{5,6}{\tan \gamma}\right)$

$f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2-765}{x^2}$

sur $]0; 50[$:

$x^2 - 765 = 0$ $\quad x^2 = 765$

$x = \sqrt{765}$ ou $-\cancel{\sqrt{765}} \notin]0; 50[$.

x		$-\sqrt{765}$		$\sqrt{765}$	
	$+$	0	$-$	0	$+$

x	0		$\sqrt{765}$		50
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\sqrt{765})$	$\nearrow$	

$\sqrt{765} \approx 27,66$
soit 28 arrondi à l'unité.

$f(x) = \frac{5,6}{\tan \gamma}$ $\qquad$ f admet un minimum pour $x_0 = \sqrt{765}$ (≈ 28)

Donc $\tan \gamma$ admet un maximum pour $x_0 = \sqrt{765}$ (≈ 28)

$\tan \gamma = \frac{5,6 \times 28}{28^2+765} \approx 0,101$

$\gamma \approx 0,10$ radian.