Exercice I.

Partie A :

1) C : concentration d'alcool dans le sang.

$C'(t)$: vitesse d'apparition d'alcool dans le sang

⚠ elle est maximale alors le coefficient directeur est le plus grand donc $t = 0$:

2) $\mathcal{C}_1$ correspond à la personne de faible corpulence.
$\mathcal{C}_2$ ——— ——— ——— de + forte corpulence.

3) $f(t) = Ate^{-t}$ $\quad A > 0$.

a) $f'(t) = A\left[e^{-t} - te^{-t}\right]$ $\left((uv)' = u'v + uv'\right)$

$f'(t) = Ae^{-t}(1-t)$

$f'(0) = Ae^{0}(1-0)$ $\qquad f'(0) = A.$

b) Faux car corpulence faible = effets alcool + rap

A doit être faible pour personne de forte corpulen

Partie B :

$f(t) = 2te^{-t}$ $\quad t \in [0 ; +\infty[.$

1) $f'(t) = 2e^{-t}(1-t)$ $\quad$ (question 3a) partie A)

signe de $f'(t)$ = signe de $(1-t)$.

car $2e^{-t} > 0$

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(1) = \frac{2}{e}$	$\searrow$	

$f(t) = 2te^{-t}$

$f(1) = \frac{2}{e}$.

$f(0) = 0$

2) La concentration est maximale si $\underline{t = 1}$

et elle vaut $\frac{2}{e}$ soit $\approx \underline{0{,}736}\ g\,L^{-1}$

3) $\lim\limits_{+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

$f(t) = 2te^{-t} = 2 \times \frac{t}{e^t}$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$

Donc $\lim\limits_{+\infty} f(t) = 0$

$\underline{\text{ccl}}$: $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$.

4) $f(t) = 2te^{-t} = 0{,}2$ (pour pouvoir répon

$2te^{-t} = 0{,}2$

4) a) tableau de variation

x	0		t_1		1		t_2		$+\infty$
$f'(t)$									
$f(t)$	0	$\nearrow$	$0,2$	$\nearrow$	$\frac{2}{e} \approx 0,736$	$\searrow$	$0,2$	$\searrow$	0

* $[0,1]$ f continue et strictement croissante

$f(0) = 0$ et $f(1) \approx 0,736$ $\quad 0,2 \in [0, \frac{2}{e}]$

TVI : il existe un unique $t_1 \in [0,1]$ tel que $f(t_1) = 0,2$

* $[1;+\infty[$ f est continue et strictement décroissante.

$f(1) = \frac{2}{e}$ et $\lim_{+\infty} f(t) = 0$ $\quad 0,2 \in]0, \frac{2}{e}]$

TVI : il existe un unique $t_2 \in [1;+\infty[$ tel que $f(t_2) = 0,2$.

ccl : il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$

b) sur $[t_1, t_2]$ la concentration est supérieure à $0,2\ g\,L^{-1}$.

Donc Paul pourra reprendre le volant si $t > t_2$
Calculatrice on trouve $t_2 \approx 3,577$ soit 3H 35min

5) a) On sait que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$

Donc il existe $\lambda > 0$ il existe $T > 0$ tel que :

pour tout $t > T$ on a $f(t) < \lambda$

si $\lambda = 5 \times 10^{-3}\ g\,L^{-1}$, il existe T à partir duquel la concentration n'est plus décelable.

b)

		Initialisation	Etape 1	Etape 2
$\left(p = \frac{1}{4}h\right)$	p	0,25	0,25	0,25
$(t + p =)$	t	3,5	3,75	4
$(f(t) =)$	c	0,21	0,18	0,15

L'algorithme affiche le temps à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus décelable.

Exercice II :

$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$ $\quad u_0 = 2$

$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$ $\quad v_0 = 7$

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5	154	224
8	6	353	448
9	7	772	896
10	8	1635	1792

<u>En C2</u> : $= B2 + 2 \times A2^2 + 3 \times A2 + 5$

<u>En B3</u> : $= 2 \times B2 + 2 \times A2^2 - A2$

2) Déterminer u_n et v_n

$$v_0 = 7 \quad v_1 = 14 \quad v_2 = 28$$

$$v_n = 7 \times 2^n$$

par hypothèse : $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$

donc $u_n = v_n - 2n^2 - 3n - 5$

$$u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$$

Démontrons ces résultats par récurrence :

Initialisation : $v_0 = 7 \times 2^0 = 7$

$u_0 = 7 - 5 = 2$

vrai pour $n = 0$

Hérédité : on suppose $v_n = 7 \times 2^n$ et
$u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$

Et on doit montrer : $v_{n+1} = 7 \times 2^{n+1}$
et $u_{n+1} = 7 \times 2^{n+1} - 2(n+1)^2 - 3(n+1) - 5$.

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$$

$$= 2(7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5) + 2n^2 - n$$

$$= 7 \times 2^{n+1} - 4n^2 - 6n - 10 + 2n^2 - n$$

$$= 7 \times 2^{n+1} - 2n^2 - 7n - 10$$

Calculons : $2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 = 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 5$
$= 2n^2 + 7n + 10$

Donc $u_{n+1} = 7 \times 2^{n+1} - 2(n+1)^2 - 3(n+1) - 5$

$v_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5$

$= 7 \times 2^{n+1} + \cancel{2(n+1)^2} + \cancel{3(n+1)} \cancel{+5} \cancel{-2(n+1)^2} - \cancel{3(n+1)} \cancel{-5}$

$= 7 \times 2^{n+1}$

$v_{n+1} = 7 \times 2^{n+1}$

vrai pour $(n+1)$

cl : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\underline{v_n = 7 \times 2^n}$

et $\underline{u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5}$

Exercice III :

T suit 1 loi exponentielle $\lambda = 0{,}2$

1) $P(T \leqslant 3) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - e^{-3 \times 0{,}2}$

$P(T \leqslant 3) \approx 0{,}451$

2) $P(T \leqslant t) \geqq 0{,}95$

$1 - e^{-\lambda t} \geqslant 0{,}95$

$1 - 0{,}95 \geqslant e^{-\lambda t}$

$0{,}05 \geqslant e^{-\lambda t} = e^{-0{,}2t}$

$\ln 0{,}05 \geqslant \ln e^{-0{,}2t}$

$\ln 0{,}05 \geqslant -0{,}2t$

$\dfrac{\ln 0{,}05}{-0{,}2} \leqslant t$

$14{,}98 \leqslant t$

$t = 15$ minutes

Il faut donc attendre 15 minutes après la 1ère étoile filante pour voir la suivante.

3) Temps moyen $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}2}$

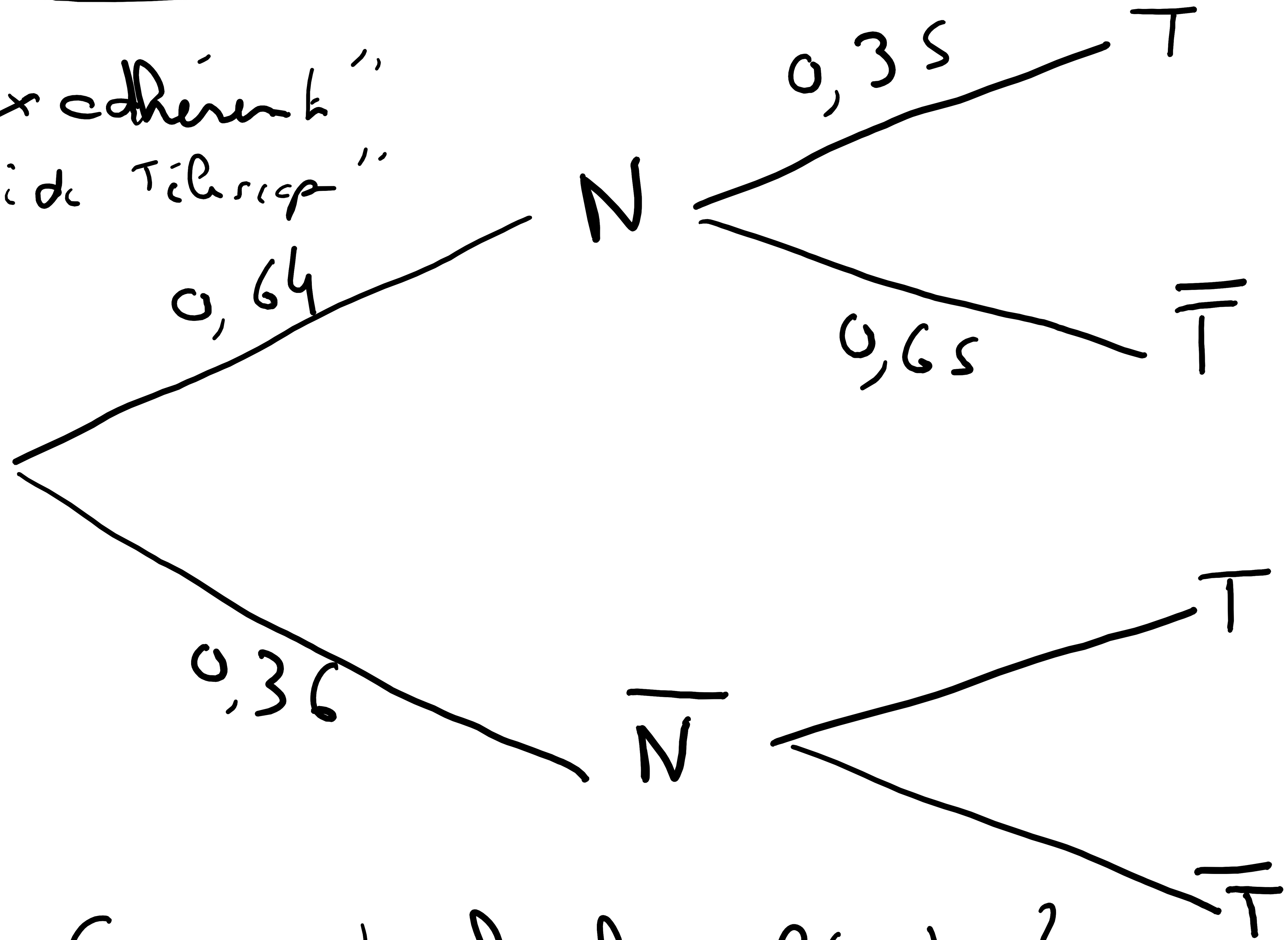
$E(T) = 5$, le temps moyen d'attente entre deux étoiles filantes est de 5 minutes.

La sortie dure 2 heures : on va observer en moyenne

$$\frac{2\times 60}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ étoiles filantes.}$$

<u>Partie B :</u>

N : "nouvel adhérent"
T : "possède télescope"



1) On veut calculer $P(T) = ?$

$P(T) = P(N \cap T) + P(\overline{N} \cap T)$ (probabilités totales)

De plus on sait par hypothèse : $P(\overline{N} \cap T) = 0,27$

$P(T) = 0,64 \times 0,35 + 0,27 = 0,494.$

2) On sait que l'adhérent possède un télescope

On veut calculer : $P_T(N) = \dfrac{P(N \cap T)}{P(T)}$

$$P_T(N) = \frac{0,64 \times 0,35}{0,494} \approx 0,453$$

Partie C :

On fait l'hypothèse que 50% de la population du village est favorable à la campagne.

sondage 54 avis favorable, échantillon $n = 100$

$n = 100$ et $p = 0,5$

$\left.\begin{array}{l} n = 100 \geq 30 \\ np = 50 \times 0,5 = 25 \geq 5 \\ n(1-p) = 50 \times 0,5 = 25 \geq 5 \end{array}\right\}$ Les conditions sont réunies

Intervalle de fluctuation asymptotique :

$$I_f = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$I_f = \left[0,5 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{100}} \,;\, 0,5 + 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{100}}\right]$$

$$I_f = [0,402 \,;\, 0,598]$$

La fréquence observée est : $f = \frac{54}{100} = 0,54$

$$f \in [0,402 \,;\, 0,598]$$

Le résultat du sondage ne le fera pas changer d'avis.

Exercice IV :

1) Proposition 1 :

$A(\sqrt{2}\,;3)$ $B(1;1)$ $C(0,-4)$

$\overrightarrow{AB}\left(1-\sqrt{2}\,;-2\right)$

$\overrightarrow{AC}\left(-\sqrt{2}\,;-7\right)$

$$xy'-x'y=(1-\sqrt{2})\times(-7)-(-2)\times(-\sqrt{2})$$
$$=-7+7\sqrt{2}-2\sqrt{2}$$
$$=-7+5\sqrt{2}\neq 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires
Les points A, B et C ne sont pas alignés.

proposition 1 fausse

2) Proposition 2 :

$$[\underbrace{i(1+i)}_{=Z}]^{2n}=(-1+i)^{2n}=\left[(-1+i)^2\right]^n$$
$$=(1-2i-1)^n=(-2i)^n=(+2)^n(-i)^n$$
$$=2^n\left(e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)^n=2^ne^{i\frac{3n\pi}{2}}$$
$$-i=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=e^{i\frac{3\pi}{2}}$$
$$Z^{2n}=2^ne^{i\frac{3n\pi}{2}}$$

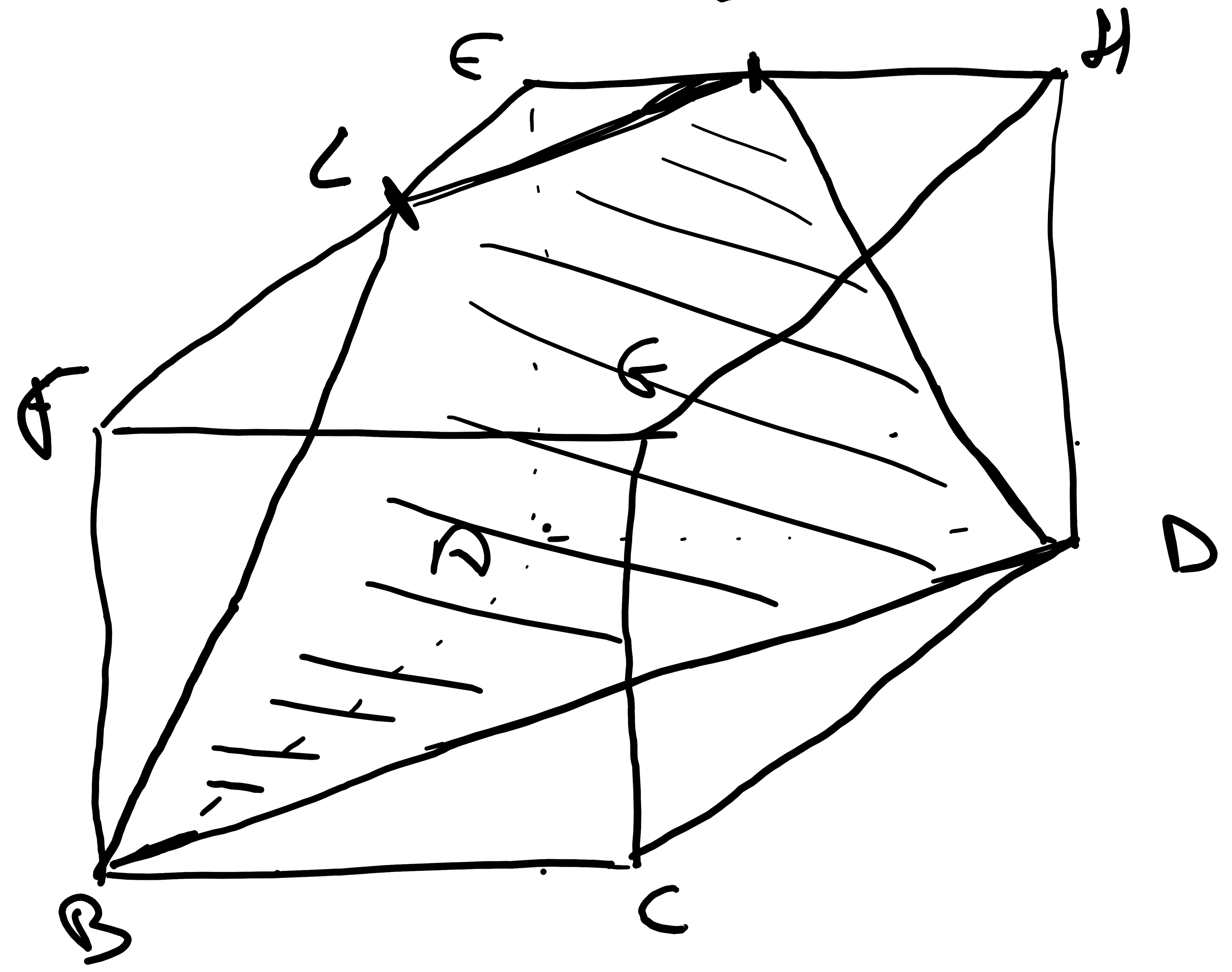
Si $n=4$ alors $e^{i\frac{12\pi}{2}}=e^{i3\times2\pi}=1$

Donc $Z^{2n}=2^4=16$

Proposition 2 fausse

3) <u>Proposition 3 :</u>

$$\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}.$$



section cube plan (BDL)

proposition 3 **fausse**

<u>Proposition 4 :</u>

Dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$

$B(0,0,0)$ $C(1,0,0)$ $A(0,1,0)$ $F(0,0,1)$.

Si triangle rectangle en B alors $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BL} = 0$.

$D(1,1,0)$ $L\left(0,\frac{2}{3},1\right)$

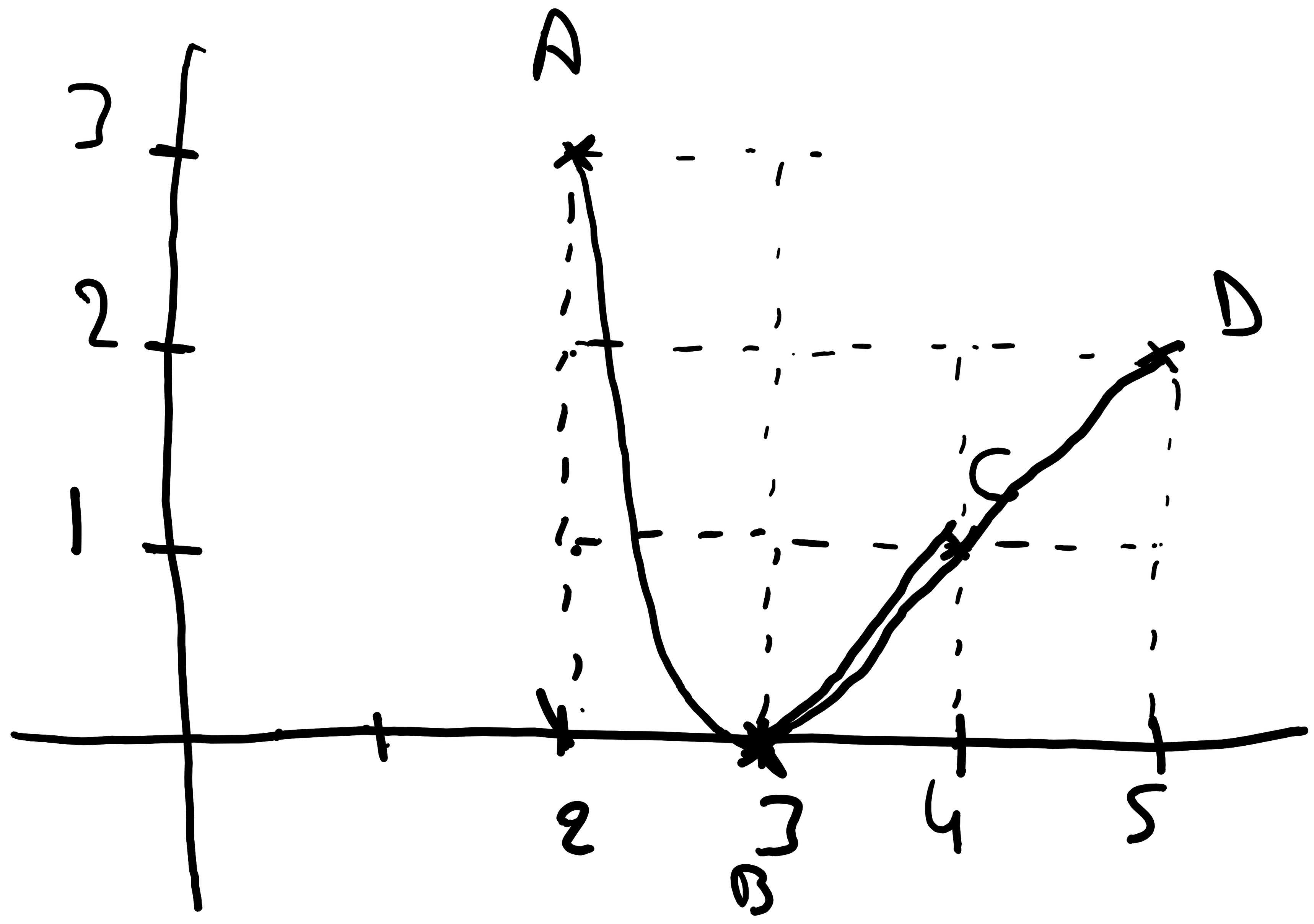
$\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}0\\2/3\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BL}\cdot\overrightarrow{BD} = 0\times1 + \frac{2}{3}\times1 + 1\times0 = \frac{2}{3} \neq 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ ne sont pas orthogonaux
Le triangle n'est pas rectangle en B. Proposition 4 **fausse**

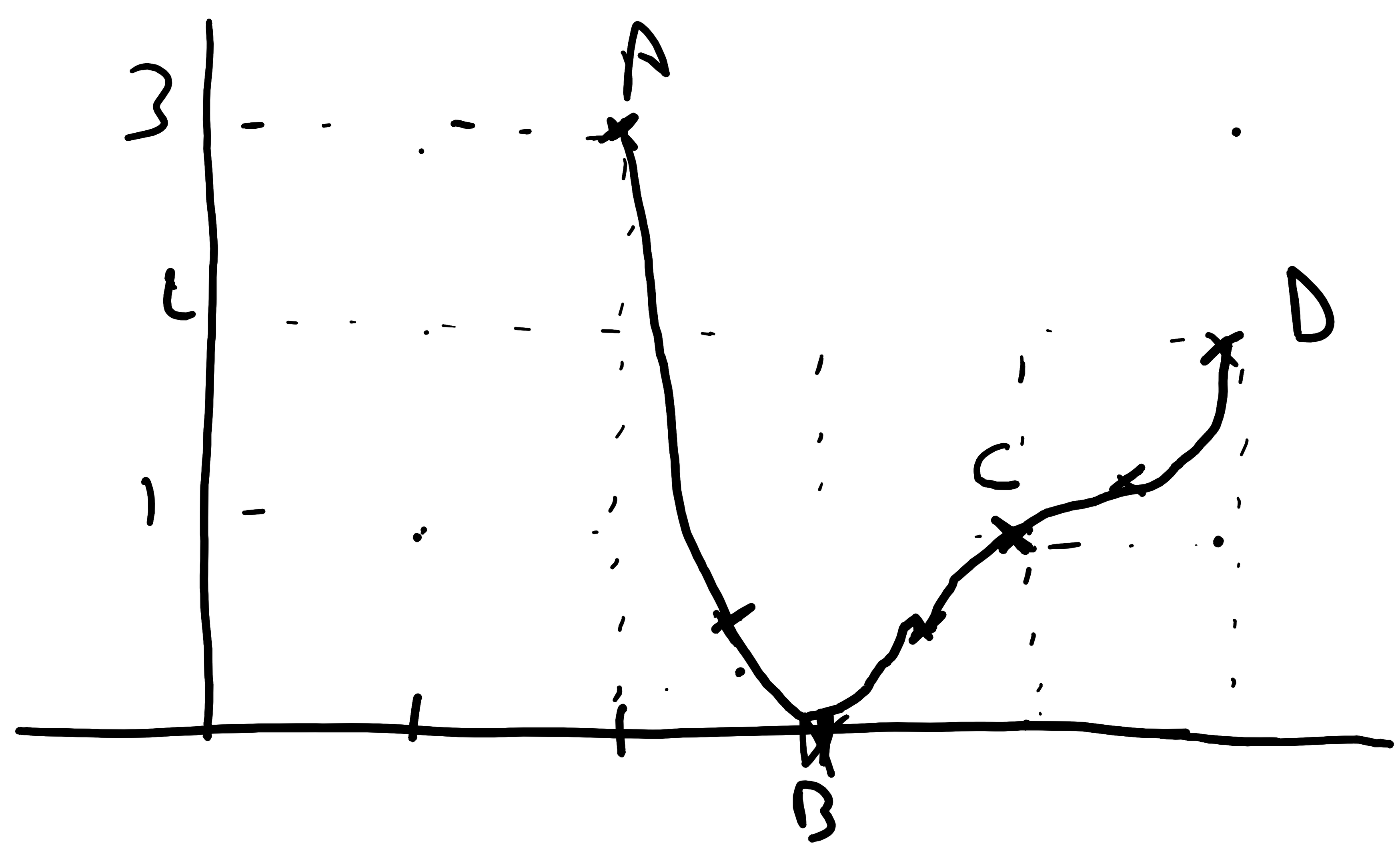
4) <u>Proposition 5</u> :

$$1{,}5 < \int_2^5 f(x)\,dx < 6$$



← correcte

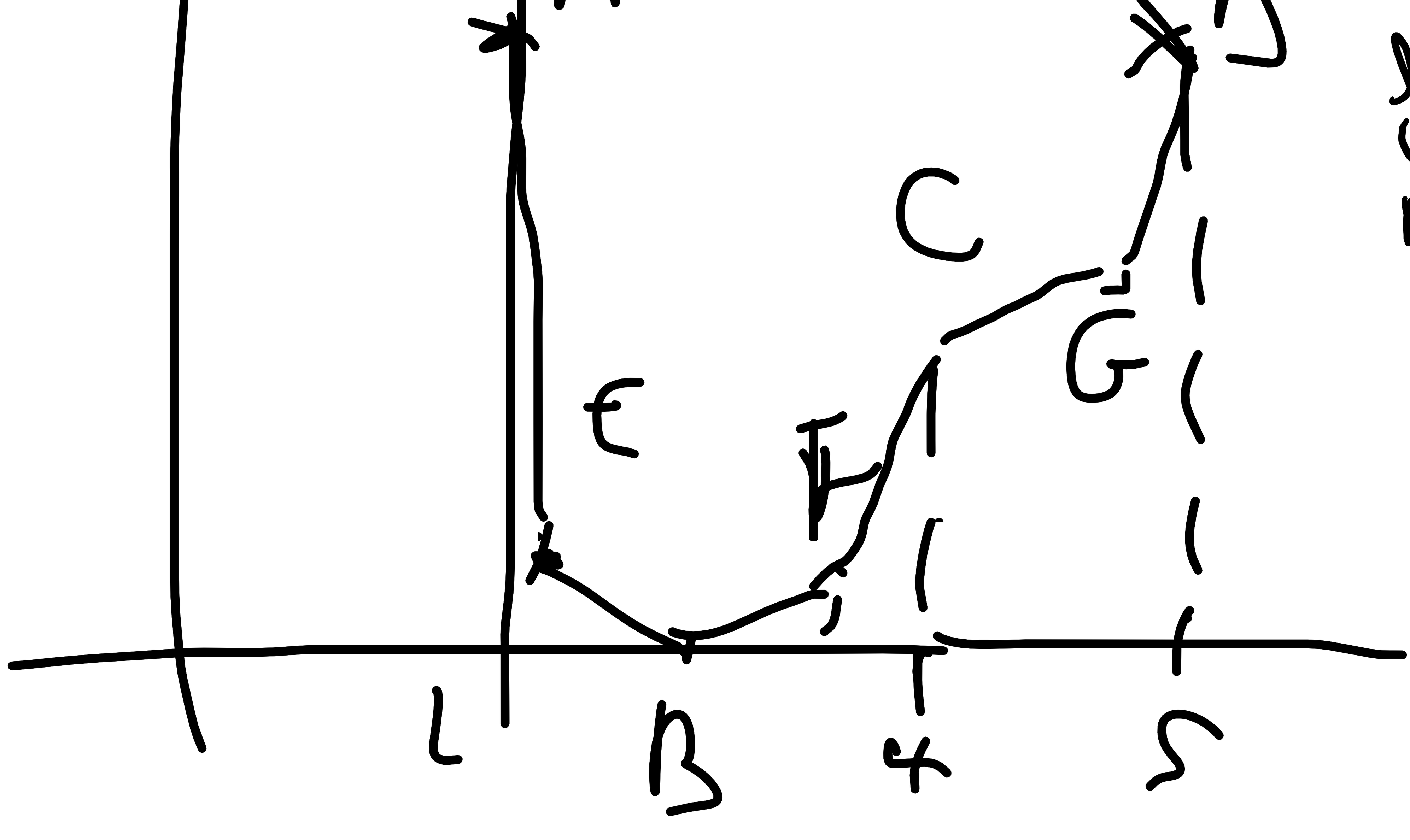
ou A(2, 3)
B(3, 0)
C(4, 1)
D(5, 2)



← correcte

La proposition semble exacte

<u>Objectif</u> : trouver un contre exemple.



fonctions affines par morceaux

$A(2,3)$ $B(3,0)$ $C(4,1)$ $D(5,2)$

$E(2+h, 0+h)$ $F(4-h, h)$ $G(5-h; 1+h)$

on choisit h "très petit" h tend vers 0.

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^{2+h} f(x)\,dx + \int_{2+h}^{3} f(x)\,dx + \int_3^{4-h} f(x)\,dx + \int_{4-h}^{4} f(x)\,dx$$

$$+ \int_4^{5-h} f(x)\,dx + \int_{5-h}^{5} f(x)\,dx$$

* (AE) : équation :

$$a = \frac{h-3}{h}$$

$$y = \frac{h-3}{h}x + b$$

$A \in (AE)$ $\quad 3 = \frac{h-3}{h} \times 2 + b$

$$b = 3 - \frac{2h-6}{h} = \frac{3h - 2h + 6}{h} = \frac{h+6}{h}$$

$y = \frac{h-3}{h}x + \frac{h+6}{h}$ équation droite(AE)

* (EB) : équation :

$$a = \frac{h}{-1+h} = \frac{-h}{1-h}$$

$B \in (EB)$ $\quad 0 = \frac{-3h}{1-h} + b$ donc $b = \frac{3h}{1-h}$

$$y = \frac{-h}{1-h}x + \frac{3h}{1-h}$$

$y = \frac{-h}{1-h}x + \frac{3h}{1-h}$ équation droite(BE)

* Equation droite (BF)

$$a = \frac{0-k}{3-4+k} = \frac{-k}{-1+k} = \frac{k}{1-k}$$

$B \in (BF)$ $\quad y = \frac{k}{1-k} \times 3 + b$ soit $0 = \frac{3k}{1-k} + b$

donc $b = \frac{-3k}{1-k}$

$y = \frac{k}{1-k}x - \frac{3k}{1-k}$ équation (BF).

* Equation (FC)

$$a = \frac{1-k}{4-4+k} = \frac{1-k}{k}$$

$C \in (FC)$ $\quad 1 = \frac{1-k}{k} \times 4 + b$ soit $b = 1 - \frac{4(1-k)}{k}$

$$b = \frac{k-4+4k}{k} = \frac{-4+5k}{k}$$

$y = \frac{1-k}{k}x + \frac{-4+5k}{k}$ équation de (FC)

* Equation (CG)

$a = \frac{k}{1-k}$ $\quad (BF)//(CG)$

$C \in (CG)$ $\quad 1 = \frac{k}{1-k} \times 4 + b$ soit $b = 1 - \frac{4k}{1-k}$

$$b = \frac{1-k-4k}{1-k} = \frac{1-5k}{1-k}$$

$$y = \frac{k}{1-k}x + \frac{1-5k}{1-k}$$

* Equation de (GD)

$$a = \frac{1-h}{h} \qquad (GD)//(FC)$$

$D \in (GD)$

$$2 = \frac{1-h}{h} \times 5 + b \text{ soit } b = 2 - \frac{5(1-h)}{h}$$

$$b = \frac{2h - 5 + 5h}{h} = \frac{-5+7h}{h}$$

$$y = \frac{1-h}{h}x + \frac{7h-5}{h} \text{ équation de } (GD).$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h-3}{h}x + \frac{h+6}{h} & \text{sur } [2;\ 2+h] \\ \frac{-h}{1-h}x + \frac{3h}{1-h} & \text{sur } [2+h;\ 3] \\ \frac{h}{1-h}x - \frac{3h}{1-h} & \text{sur } [3;\ 4-h] \\ \frac{1-h}{h}x + \frac{5h-4}{h} & \text{sur } [4-h;\ 4] \\ \frac{h}{1-h}x + \frac{1-5h}{1-h} & \text{sur } [4;\ 5-h] \\ \frac{1-h}{h}x + \frac{7h-5}{h} & \text{sur } [5-h;\ 5] \end{cases}$$

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^{2+h}\left(\frac{h-3}{h}x + \frac{h-6}{h}\right)dx + \int_{2+h}^{3}\left(\frac{-h}{1-h}x + \frac{3h}{1-h}\right)dx + \int_3^{4-h}\left(\frac{h}{1-h}x - \frac{3h}{1-h}\right)dx$$

$$+ \int_{4-h}^{4}\left(\frac{1-h}{h}x + \frac{5h-4}{h}\right)dx + \int_4^{5-h}\left(\frac{h}{1-h}x + \frac{1-5h}{1-h}\right)dx +$$

$$\int_{5-h}^{h}\left(\frac{1-h}{h}x + \frac{7h-5}{h}\right)dx$$

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \frac{\cancel{h^2} + 3h}{2} + \frac{h - \cancel{h^2}}{2} + \frac{h - \cancel{h^2}}{2}$$

$$+ \frac{\cancel{h^2} + h}{2} + \frac{2 - h - \cancel{h^2}}{2} + \frac{3h + \cancel{h^2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3h + h + h + \cancel{h} + 2 - \cancel{h} + 3h\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + 8h\right) = \underline{1 + 4h}$$

$$1 + 4h < 1,5$$

$$h < \frac{1}{8} = 0,125$$

Si $0 < h < \frac{1}{8}$ alors

$$\int_2^5 f(x)\,dx < 1,5$$

proposition 5 <u>fausse</u>