Exercice 2 :

1) **Affirmation 1 :**

X loi normale $\mu = 200$
$\sigma = 10$

$$P(X \geq 187) = \frac{1}{2} + P(187 \leq X \leq 200)$$

$$\approx 0,5 + 0,403$$

$$\approx 0,903 > 0,9 .$$

Affirmation 1 vraie.

2) **Affirmation 2 :**

$x - \cos x = 0 \qquad [0, \frac{\pi}{2}]$

$f(x) = x - \cos x$

$f'(x) = 1 + \sin x \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$f'(x) \geq 0$, f est croissante. $\quad 0 \leq \sin x \leq 1$

$1 \leq 1 + \sin x \leq 2$

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1 $\nearrow$	0	$\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$

$f(0) = 0 - \cos 0 = -1$

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \cancel{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

f est continue et strictement croissante
TVI ; il existe un unique $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$
tel que $f(\alpha) = 0$. Affirmation 2 vraie.

3) Affirmation 3 :

$$D \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = 4t \end{cases} \qquad D' \begin{cases} x = -5t'+3 \\ y = 2t' \\ z = t'+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+2t = -5t'+3 \\ 2-3t = 2t' \\ 4t = t'+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2t+5t' = 2 \\ 3t+2t' = 2 \\ 4t-t' = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t+5t' = 2 \\ 3t+2t' = 2 \\ 8t-2t' = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2t+5t' = 2 \\ 3t+2t' = 2 \\ 11t = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2t+5t' = 2 \\ 2t' = 2-\frac{30}{11} \\ t = \frac{10}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t+5t' = 2 \\ 2t' = \frac{-8}{11} \\ t = \frac{10}{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2t+5t' = 2 \\ t' = \frac{-8}{22} \\ t = \frac{10}{11} \end{cases}$$

$$2\times\frac{10}{11} - \frac{5\times 8}{22} = \frac{20}{11} - \frac{5\times 8}{22} = 0 \neq 2.$$

Ce système n'a pas de solution

Les droites ne sont pas sécantes

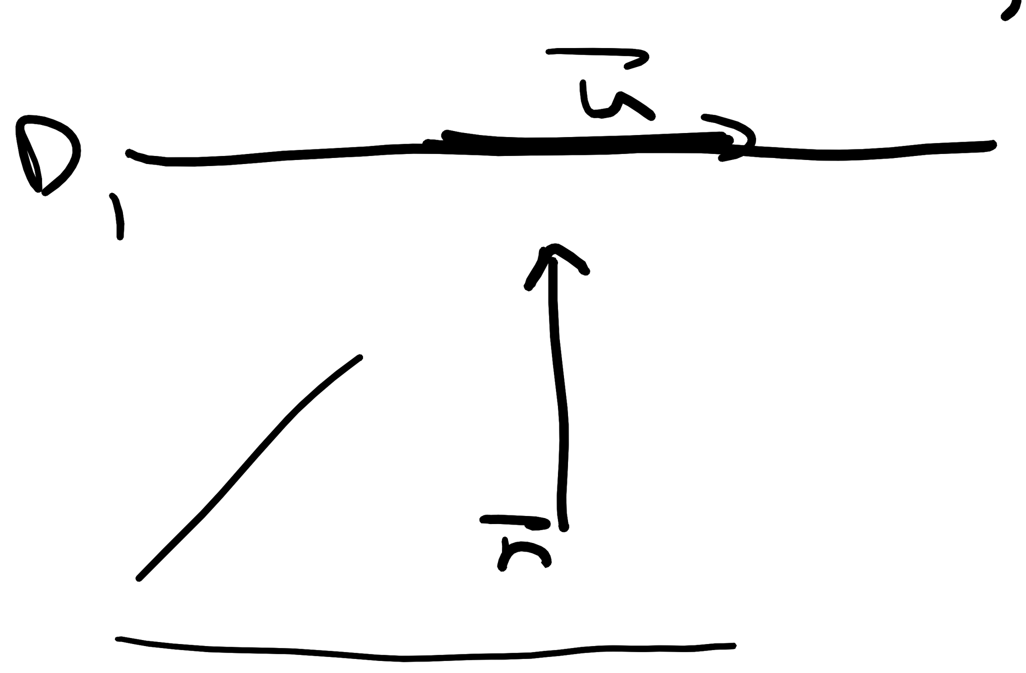
Affirmation 3 fausse.

4) <u>Affirmation 4</u> :

D_1 : vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$ $A(1,2$

Plan : $x + 2y + z - 3 = 0$ vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

si D_1 est parallèle à $\mathcal{P}$ alors



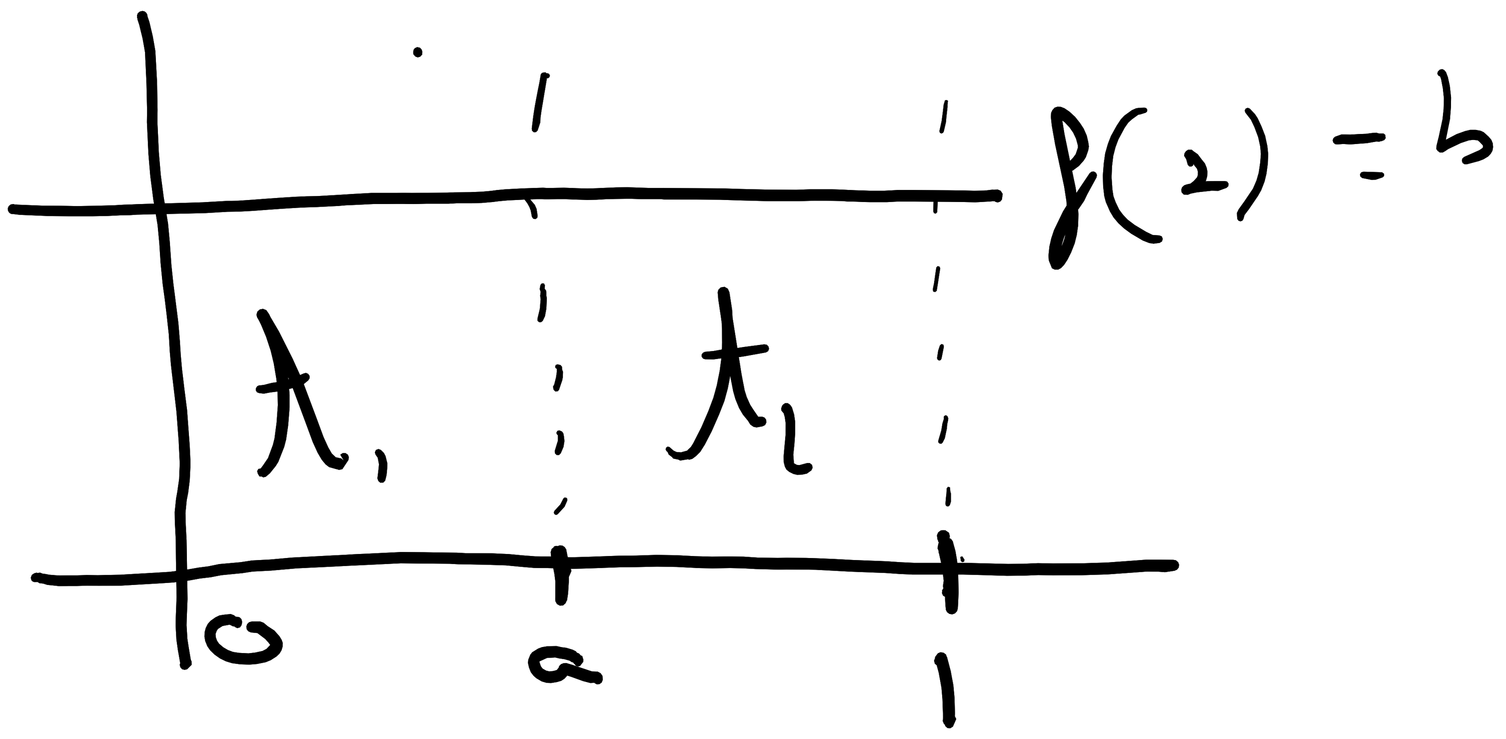
$$\vec{n}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} = 2-6+4=$$

$\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux

La droite D_1 est parallèle à $\mathcal{P}$.

Exercice II :

1) a) f constante $\qquad f(x) = b$



$A_1 = A_2$ si $a = \frac{1}{2}$.

b) $f(x) = x$

$$A_1 = \int_0^a x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^2}{2}$$

$$A_2 = \int_a^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^1 = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$A_1 = A_2$ alors $\frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2}$

$a^2 = \frac{1}{2}$ soit $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\cancel{a = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$a > 0$

Donc $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) a) $A_1 = \int_0^a f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_0^a = F(a) - F(0)$

$$A_2 = \int_a^1 f(x) = \left[F(x)\right]_a^1 = F(1) - F(a)$$

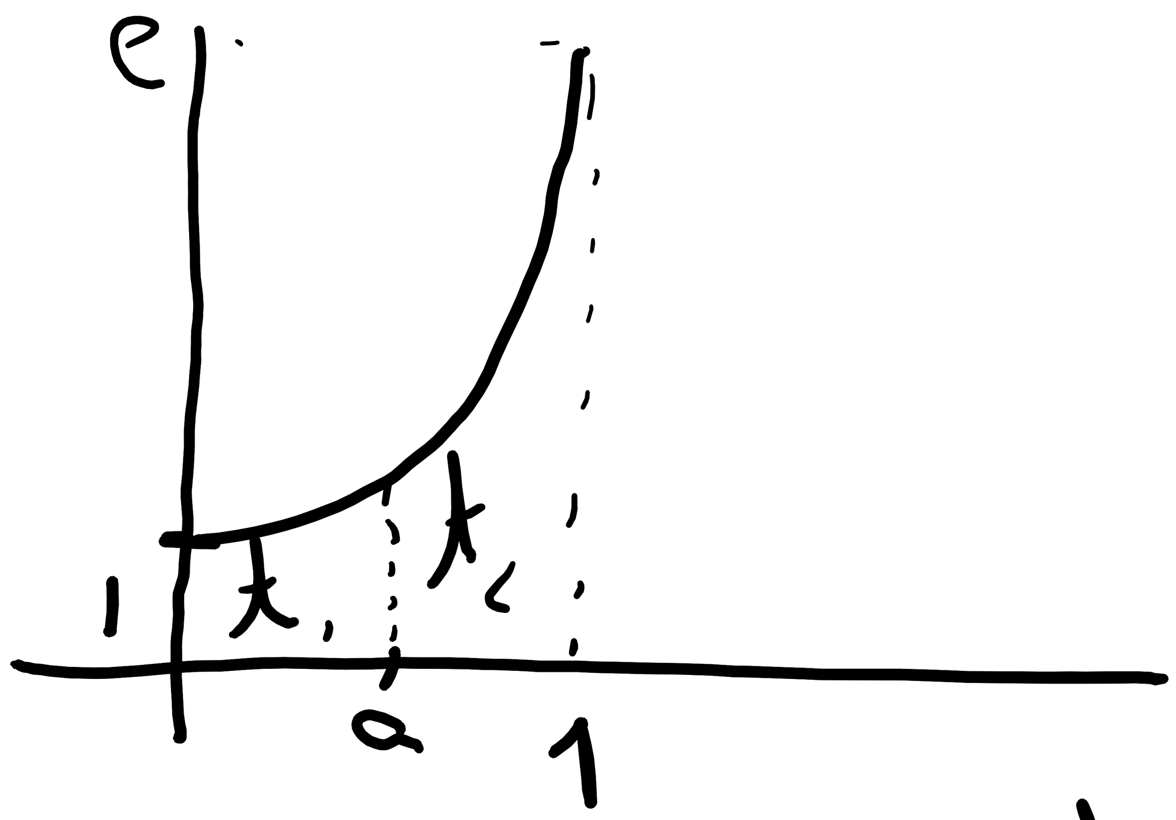
$A_1 = A_2$ alors $F(a) - F(0) = F(1) - F(a)$

$$2F(a) = F(1) - F(0)$$

$$F(a) = \frac{1}{2}\left(F(1) - F(0)\right)$$

la réciproque est vraie.

3) a) $f(x) = e^x$



$$A_1 = \int_0^a e^x \, dx = \left[e^x\right]_0^a = e^a - 1$$

$$A_2 = \int_a^1 e^x \, dx = \left[e^x\right]_a^1 = e - e^a$$

$$A_1 = A_2 \iff e^a - 1 = e - e^a$$

$$\iff 2e^a = e + 1$$

$$\iff e^a = \frac{e+1}{2}$$

$$\iff a = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

$$A_1 = \int_0^a \frac{1}{(x+2)^2} \, dx = \left[\frac{-1}{x+2}\right]_0^a = \frac{-1}{a+2} + \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_a^1 \frac{1}{(x+2)^2} \, dx = \left[\frac{-1}{x+2}\right]_a^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{a+2}$$

$$A_1 = A_2 \iff \frac{-1}{a+2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{a+2} \iff \frac{2}{a+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\iff \frac{2}{a+2} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} \iff \frac{2}{a+2} = \frac{5}{6}$$

$$\iff 5(a+2) = 12 \iff a + 2 = \frac{12}{5}$$

$$\iff a = \frac{12}{5} - 2 = \frac{12}{5} - \frac{10}{5} \iff \underline{a = 2/5}$$

Partie B :

1) $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$?

$f(x) = 4 - 3x^2$

$$A_1 = \int_0^a (4 - 3x^2)\,dx = \left[4x - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}}\right]_0^a$$

$$= 4a - a^3$$

$$A_2 = \int_a^1 (4 - 3x^2)\,dx = \left[4x - x^3\right]_a^1.$$

$$= 4 - 1 - 4a + a^3 = 3 - 4a + a^3$$

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow 4a - a^3 = 3 - 4a + a^3$$

$$\Leftrightarrow 8a = 2a^3 + 3$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2a^3 + 3}{8} \Leftrightarrow \underline{a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}}$$

2) $u_0 = 0 \qquad f(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$

a) $u_1 = f(u_0) = \frac{u_0^3}{4} + \frac{3}{8}$

$$\underline{u_1 = \frac{3}{8}}$$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$

$f'(x) = \dfrac{3x^2}{4} > 0 \qquad x \in [0, 1]$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{3}{8}$	$\nearrow$	$\frac{5}{8}$

$f(0) = \dfrac{3}{8}$

$f(1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8}$

$f(1) = \dfrac{5}{8}$

c) $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \dfrac{3}{8}$

$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$ vraie

Hérédité : on suppose propriété vraie au rang n $\quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$
et on doit montrer que :
$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

f est croissante alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$

$f(0) = \dfrac{3}{8}$ et $f(1) = \dfrac{5}{8}$

$0 \leq \dfrac{3}{8} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \dfrac{5}{8} \leq 1$

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$

vrai au rang $(n+1)$.

Conclusion : pour tout entier naturel n,
on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

d) La suite est croissante et majorée par 1

Donc elle est convergente.

Soit L la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = L$

$g(L) = L$ or on a montré que $g(a) = a$

donc $\underline{L = a}$

e) A la calculatrice on trouve :

$u_{10} \approx 0{,}389\ 807\ 84$ à 10^{-8} près.

Exercice III :

Partie A :

1) a) 700 personnes
tirages indépendants

A chaque tirage, deux issues

→ la personne répond
→ la personne ne répond pas.

X suit 1 loi binomiale de paramètres :
$n = 700$ et $p = 0,6$

b) $P(X \geq 400) = 1 - P(X < 400)$
$= 1 - P(X \leq 399)$

$\approx \underline{0,94}$.

2) $P(X \geq 400) > 0,9$.

Calculatrice :

- $P(X \geq 400) \simeq 0,870$ si $n = 690$
- $P(X \geq 400) \simeq 0,879$ si $n = 691$
- $P(X \geq 400) \simeq 0,888$ si $n = 692$
- $P(X \geq 400) \simeq 0,897$ si $n = 693$
- $P(X \geq 400) \simeq 0,905$ si $n = 694$

Donc $\underline{n = 694}$

Partie B :

1) $f = 0,29$ (29% sont favorable).

intervalle de confiance

$$I_c = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

$$I_c = \left[0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

2) amplitude $\leq 0,04$.

$$\text{amplitude} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

donc $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,04$

$$\frac{2}{0,04} \leq \sqrt{n}$$

$$50 \leq \sqrt{n}$$

Donc $n \geq 2500$

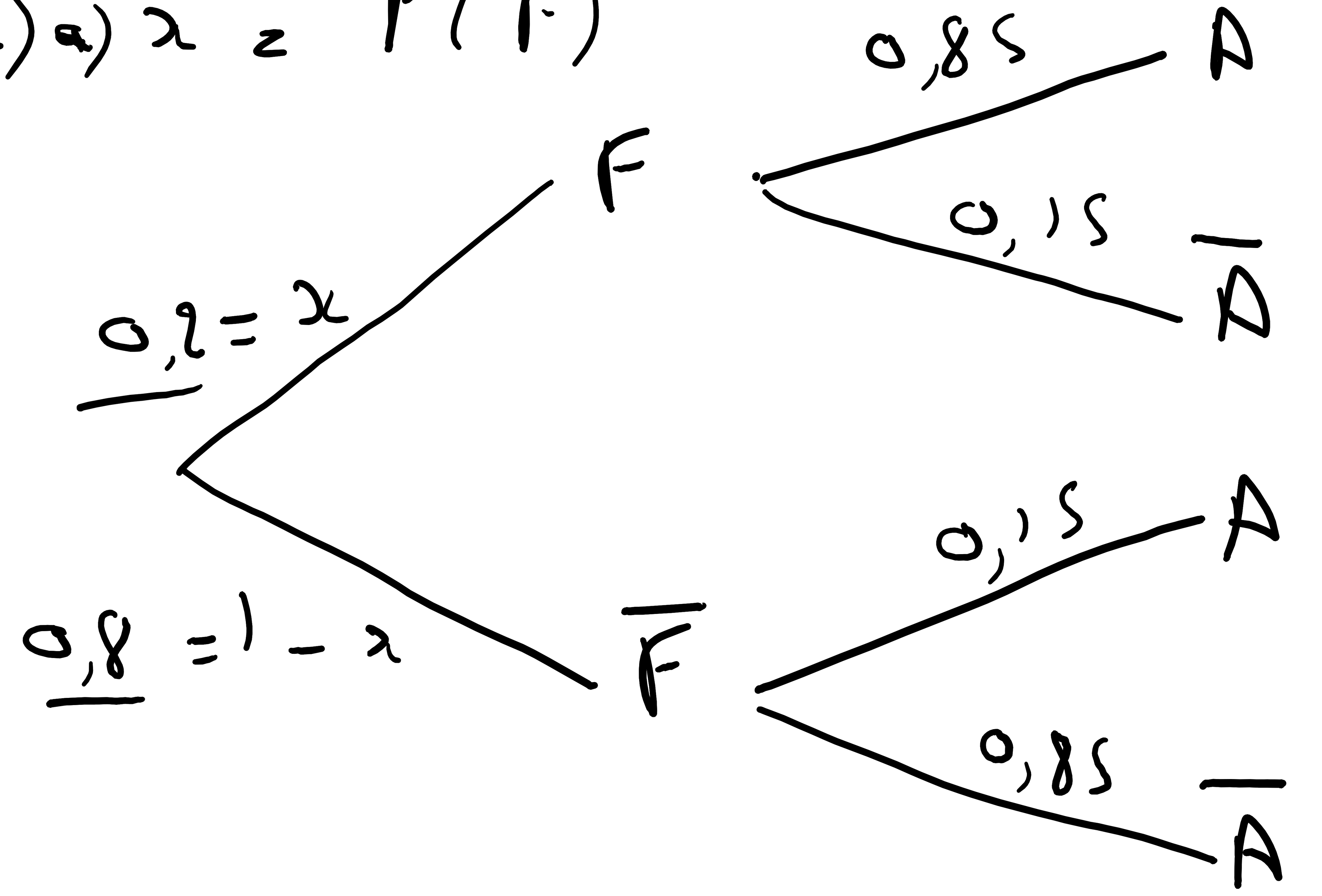
Partie C :

1) $P_F(A) = 1 - 0,15 = 0,85$

15% taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu.

$P_{\overline{F}}(A) = 0,15$

2) a) $x = P(F)$



b) $P(A) = P(A \cap F) + P(A \cap \overline{F})$

$= 0,85x + (1-x) \times 0,15$

$= 0,85x - 0,15x + 0,15$

$P(A) = 0,70x + 0,15$

On sait que $P(A) = 0,29$

d'où $0,70x + 0,15 = 0,29$

$0,7x = 0,29 - 0,15 = 0,14$

$x = 0,2$

3) Comme $P(F) = x = 0,2$

20 % des personnes sont réellement favorables au projet.

Exercice IV :

Partie A :

$$z_k = \left(1 + \frac{k}{6}\right) e^{i\frac{2k\pi}{6}}$$

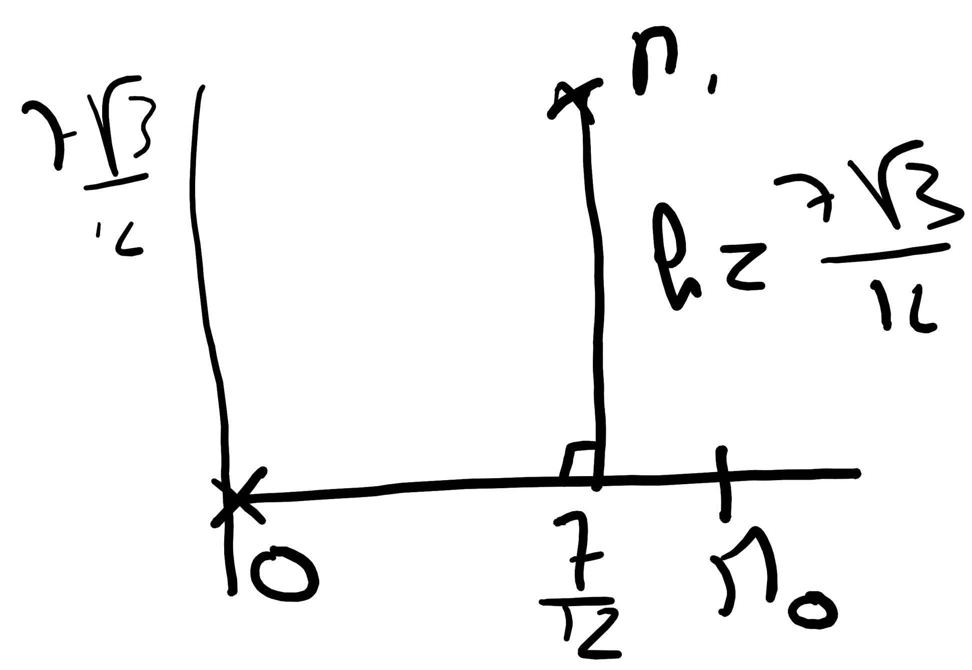
1) $$z_1 = \left(1 + \frac{1}{6}\right) e^{i\frac{2\pi}{6}} = \frac{7}{6} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_1 = \frac{7}{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_1 = \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7}{12} + i\frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

2) $$\left.\begin{array}{l} z_0 = 1e^0 = 1 \\ z_6 = 2e^{i2\pi} = 2 \times 1 = 2 \end{array}\right\} \underline{\text{entiers}}$$

3) $$\begin{cases} O : z_0 = 0 \\ M_0 : z_1 = 1 \\ M_1 = \frac{7}{12} + i\frac{7\sqrt{3}}{12} \end{cases}$$



hauteur : $h = \frac{7\sqrt{3}}{12}$

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{OM_0 \times h}{2} = \frac{1 \times \frac{7\sqrt{3}}{12}}{2}$$

$$A = \frac{7\sqrt{3}}{24}$$

Partie B :

1) $OM_k = |z_k - z_0| = |z_k| = \left|\left(1 + \frac{k}{n}\right)e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right|$

$$OM_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right) \qquad 0 \leq k \leq n.$$

2) $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k}) = \arg z_k = \frac{2k\pi}{n}$

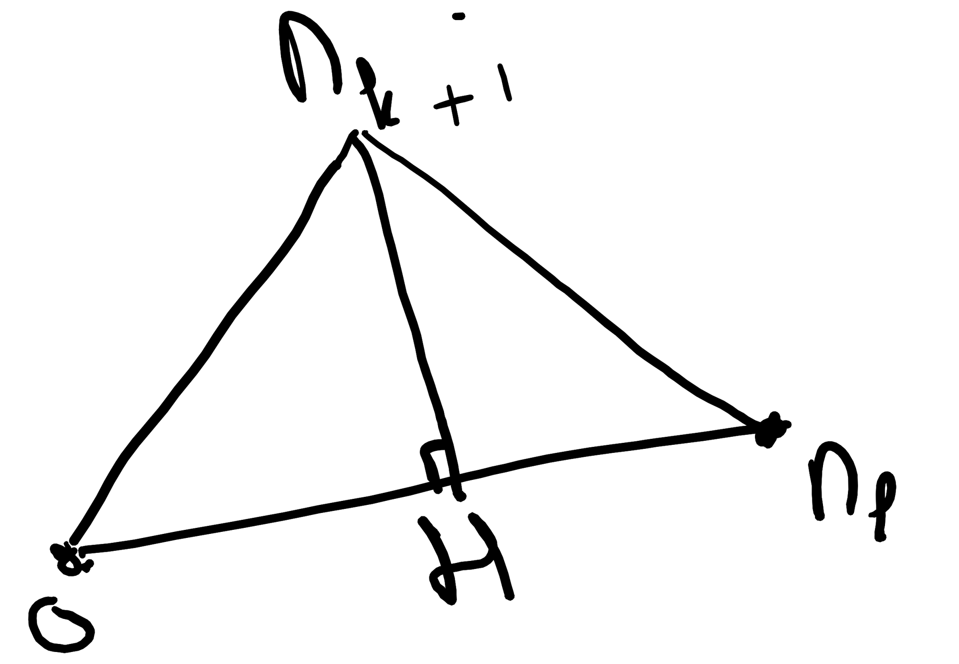
$$(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \arg z_{k+1} = \frac{2(k+1)\pi}{n}$$

$$(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OM_k})$$
$$= \left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) - \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

$$(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}$$

3) $0 \leq k \leq n-1$

OM_kM_{k+1} hauteur issue de M_{k+1}



Dans le triangle OHM_{k+1} rectangle en H.

$$\widehat{HOM_{k+1}} = \frac{2\pi}{n}$$

$$OM_{k+1} = |z_{k+1}| = \left|\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}\right|$$

$$= 1 + \frac{k+1}{n}$$

$$\sin\left(\widehat{HOM_{k+1}}\right) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{M_{k+1}H}{OM_{k+1}}$$

$$M_{k+1}H = OM_{k+1} \sin\left(\widehat{HOM_{k+1}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{(k+1)}{n}\right) \times \frac{2\pi}{n}$$

4) Compléter le tableau : à la calculatrice on trouve :

k	0	...	7	8	9
A	0,323	--	4,726	5,731	6,848

5) L6 : Tant que $A_n < 7,2$

L13 : Afficher n