Exercice 2 :

1) $f(x) = 5 - x + 2\ln x$

$f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{-x+2}{x}$

réponse c.

2) $f'(x) = 0 \longrightarrow$ 1 solution

réponse b.

3) $f'(4) = \frac{-4+2}{4} = \frac{-1}{2}$.

$f(4) = 5 - 4 + 2\ln 4 = 1 + 2\ln 4$

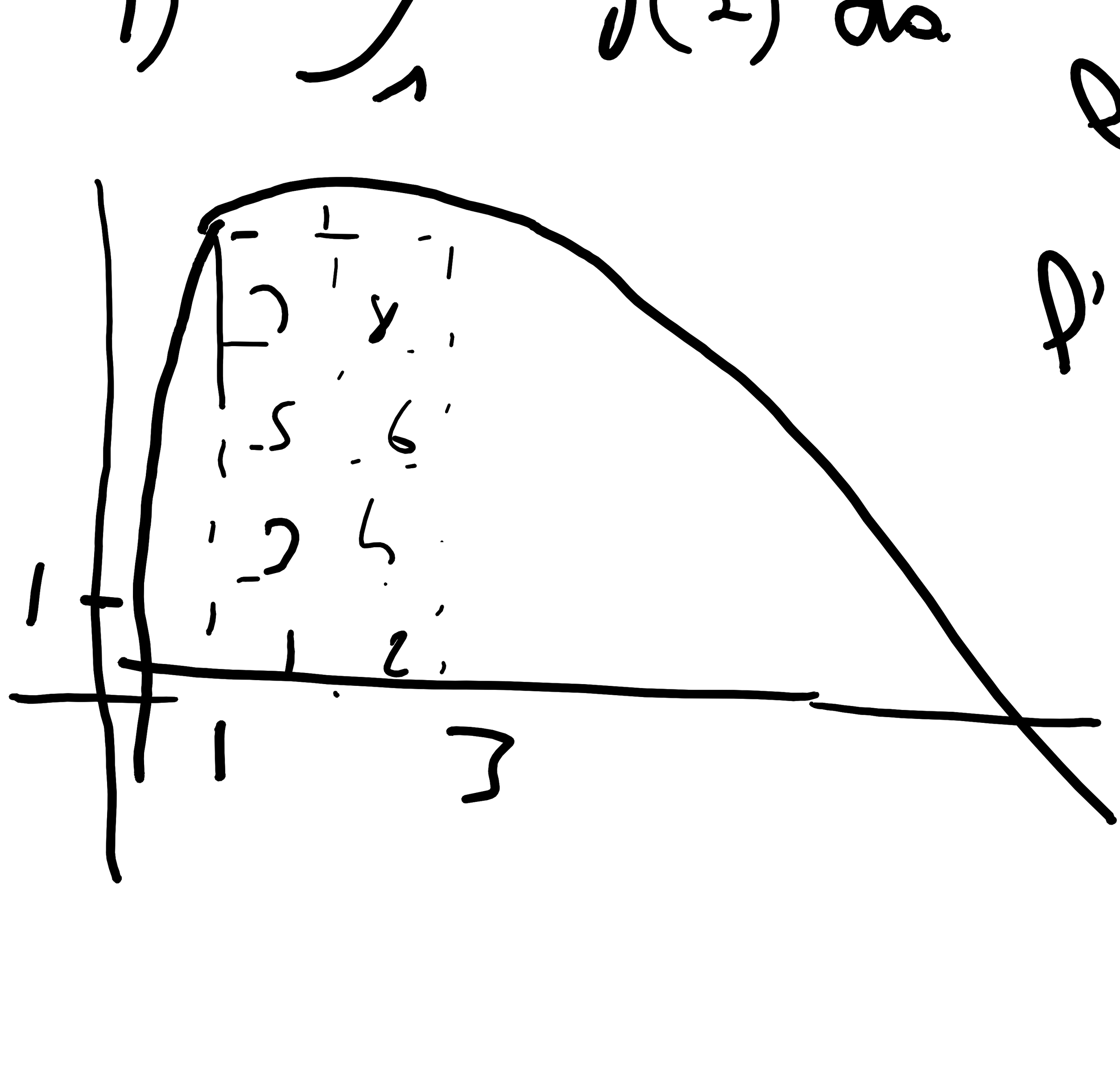
$y = f'(4)(x-4) + f(4)$

$y = -\frac{1}{2}(x-4) + 1 + 2\ln 4$

$y = -\frac{1}{2}x + 2 + 1 + 2\ln 4 = \frac{-1}{2}x + 3 + 2\ln 4.$

$y = -\frac{1}{2}x + 3 + 2\ln 4$ réponse d

4) $\int_1^3 f(x)\,dx$



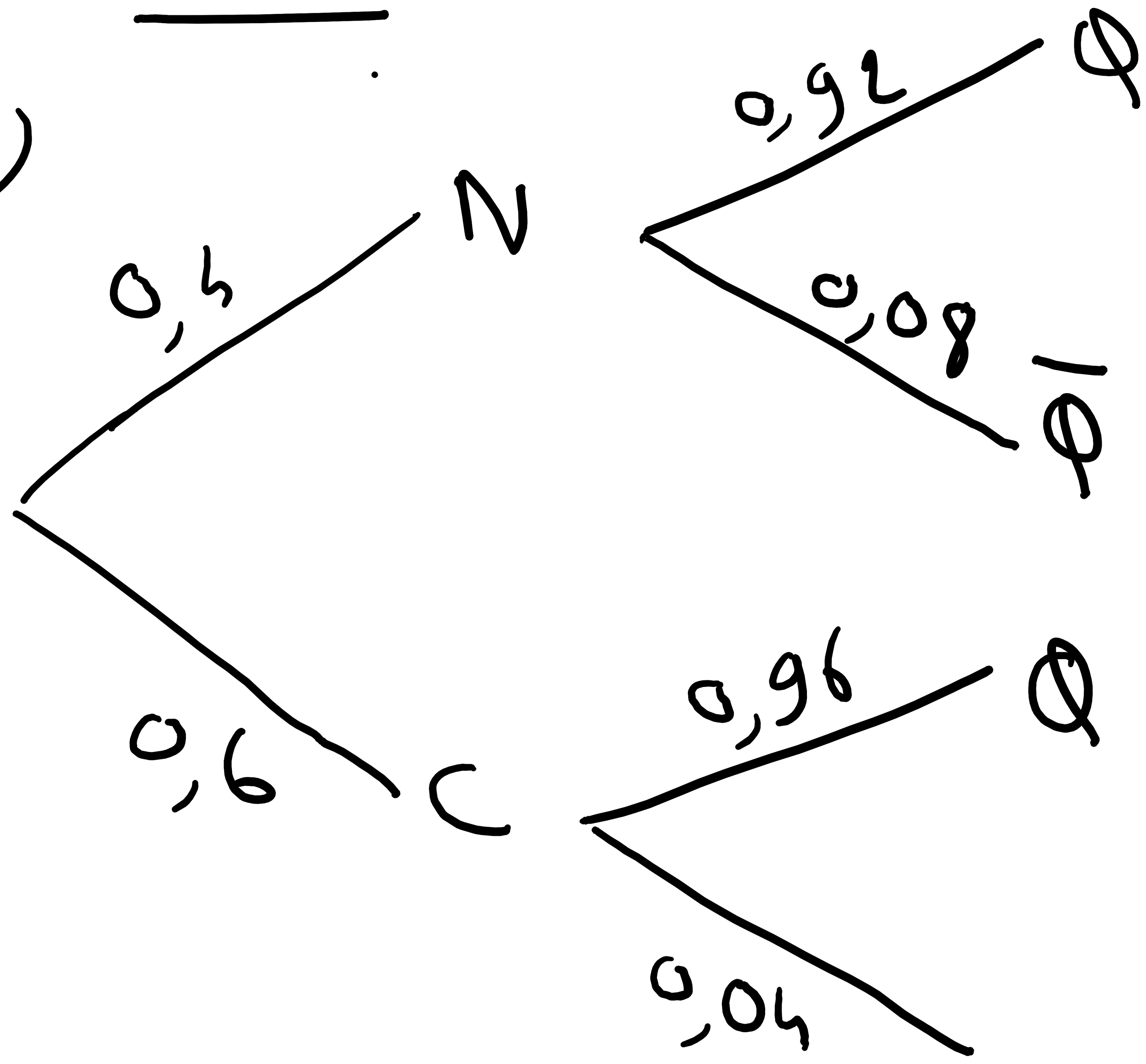
La valeur de l'intégrale appartient à l'intervalle $[8 ; 9]$

réponse c

Exercice II :

Partie A :

1)



2) $N \cap Q$: $P(N \cap Q) = P(N) \times P_N(Q)$

$= 0,4 \times 0,92$

$P(N \cap Q) = 0,368$

$N \cap Q$: "Le pneu choisi est neige et a réussi les tests de qualité".

3) $P(Q) = P(N \cap Q) + P(C \cap Q) = P(N) \times P_N(Q) + P(C) \times P_C(Q)$

$= 0,4 \times 0,92 + 0,6 \times 0,96$

$P(Q) = 0,944.$

4) On sait que le pneu a réussi test de qualité
On cherche : $P_Q(N) = \frac{P(N \cap Q)}{P(Q)} = \frac{P(N) \times P_N(Q)}{P(Q)} \; \frac{0,36}{0,94}$

$P_Q(N) = 0,390$

Partie B :

1) $P(X \leq 25) = \frac{1}{2} - P(25 \leq X \leq 30)$

$P(X \leq 25) \approx 0,5 - 0,234$

$P(X \leq 25) \approx 0,266$

2) $P(X \geq d) = 0,20$ soit $P(X \leq d) = 0,8$

A la calculatrice on trouve :

$d \simeq 36,733$

Donc $\underline{d = 36733}$

Partie C :

1) 85% de clients satisfaits $p = 0,85$.

échantillon 900, 735 satisfaits

$$\left.\begin{array}{l} n = 900 \geq 30 \\ np = 765 \geq 5 \\ n(1-p) = 135 \geq 5 \end{array}\right\}$$ Les conditions sont réunies.

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \; ; \; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$$= \left[0,85 - 1,96\sqrt{\frac{0,85 \times 0,15}{900}} \; ; \; 0,85 + 1,96\sqrt{\frac{0,85 \times 0,15}{900}}\right]$$

$$= [0,827 \; ; \; 0,873]$$

$f = \frac{735}{900} = 0,817$ or $f \notin [0,827 ; 0,873]$

cl : il y a 1 défaut de fabrication sur les pneus au risque de 5%.

Exercice III :

Partie A :

1) $u_0 = 500$

$u_1 = 500 + \frac{500 \times 6}{100} = 530$

$u_2 = 530 + \frac{530 \times 6}{100} = 1,6 \times 530 = 561,8$

soit $u_2 = 562$ arrondi à l'unité.

2) $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n \times 6}{100} = 1,06\, u_n$

suite géométrique de raison $q = 1,06$

et de 1er terme $u_0 = 500$.

Expression de u_n en fonction de n : $u_n = u_0 \times q^n$

$\underline{u_n = 500 \times 1,06^n}$

3) $u_n = 1,06^n \times 500$

or $q = 1,06 > 1$

Donc $\lim\limits_{+\infty} q^n = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} 1,06^n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$.

Partie B :

1) L3 : Tant que $U < 1000$

L5 : Affecter à U la valeur $1,06 \times U$

L7 : Afficher n

2) Méthode algébrique : n ?

$$1,06^n \times 500 \geq 1000$$

$$1,06^n \geq 2$$

$$\ln 1,06^n \geq \ln 2 \quad (\ln \text{ croissante sur }]0;+\infty[)$$

$$n \ln 1,06 \geq \ln 2$$

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,06} \quad \left(\begin{array}{c} 1,06 > 0 \\ \text{donc } \ln 1,06 > 0 \end{array}\right)$$

$$n \geq 11,89$$

$n = 12$, donc 12 mois le nombre de films proposés aura doublé.

Partie C :

1) $v_0 = 15.000$

10% des clients se désabonnent
2500 nouveaux abonnés

$$v_{n+1} = v_n - \frac{10}{100} \times v_n + 2500$$
$$= \left(1 - \frac{10}{100}\right) v_n + 2500 = 0,9 v_n + 2500$$
$$\underline{v_{n+1} = 0,9 v_n + 2500}$$

2) $w_n = v_n - 25000$

a) $w_{n+1} = v_{n+1} - 25000$
$$= 0,9 v_n + 2500 - 25000$$
$$= 0,9 v_n - 22500 = 0,9\left(v_n - \frac{22500}{0,9}\right)$$
$$w_{n+1} = 0,9(\underbrace{v_n - 25000}_{w_n})$$
$$\underline{w_{n+1} = 0,9 w_n}$$

(w_n) suite géométrique de raison $q = 0,9$
et de 1er terme $w_0 = v_0 - 25000 = 15000 - 25000$
$$\underline{w_0 = 10.000}$$

b) $w_n = w_0 \times q^n = 10.000 \times 0,9^n$

Comme $v_n = w_n + 25\,000$

$w_n = 10.000 \times 0,9^n$

On obtient :

$$\underline{v_n = 10.000 \times 0,9^n + 25\,000}$$

c) On peut prévoir une stabilisation du nombre d'abonnés car :

$$0,9 < 1 \quad \text{d'où} \lim_{n \to +\infty} (0,9)^n = 0.$$

Donc $\lim_{+\infty} v_n = 25\,000$.

Le nombre va se stabiliser vers 25 000 abonnés

Exercice IV :

1) $f(x) = \dfrac{0,4}{20e^{-x}+1} + 0,4$

$f'(x) = 0,4 \times \dfrac{20e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$ $\left(\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}\right)$

$f'(x) = \dfrac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$

2) $f''(x) = 8e^{-x} \times \dfrac{20e^{-x}-1}{(20e^{-x}+1)^2}$

Cours : f est convexe sur I, si et seulement si, $f''(x) > 0$

$e^{-x} > 0$

$(20e^{-x}+1)^2 > 0$

signe de $20e^{-x} - 1 = 0$

$e^{-x} = \dfrac{1}{20}$ soit $e^{-x} = e^{\ln \frac{1}{20}}$

$e^{-x} = e^{-\ln 20}$ donc $\underline{x = \ln 20}$

$20e^{-x} - 1 > 0$ soit $-x \geq -\ln 20$

$\underline{x \leq \ln 20}$

$f''(x) \geq 0$ si $x \in [0 ; \ln 20]$

donc f est convexe sur $[0 ; \ln 20]$.

Partie B :

* Proposition 1 :

$$f(8) = \frac{0,4}{20e^{-8}+1} + 0,4$$

$$f(8) \approx 0,797 \neq 0,6$$

proposition 1 fausse

* Proposition 2 :

Ecart entre A et B :

A : $f(0) = \frac{0,4}{20+1} + 0,4$

$$f(0) \approx 0,419$$

Ecart altitude entre A et B :

$$f(1) - f(0) \approx 0,797 - 0,419$$

$\approx 0,378$ km soit 378 mètres

proposition 2 Vraie

* proposition 3 : Le pente en A :

pente = coefficient directeur $= f'(0) = \frac{8}{(20+1)^2}$

$f'(0) = 0,018$ soit $1,8\%$

proposition 3 Vraie

* Proposition 4 :

projet accepté si ~~en~~ aucun point de $\mathcal{C}_f$ la pente dépasse 12%.

La fonction est convexe sur $[0 ; \ln 20]$ et concave sur $[\ln 20 ; 8]$.

La valeur maximale de $f'(x)$ est atteinte pour $x = \ln 20$

$$f'(\ln 20) \simeq 0{,}1 \quad \text{soit } 10\% \quad (< 12\%)$$

Le projet sera accepté.