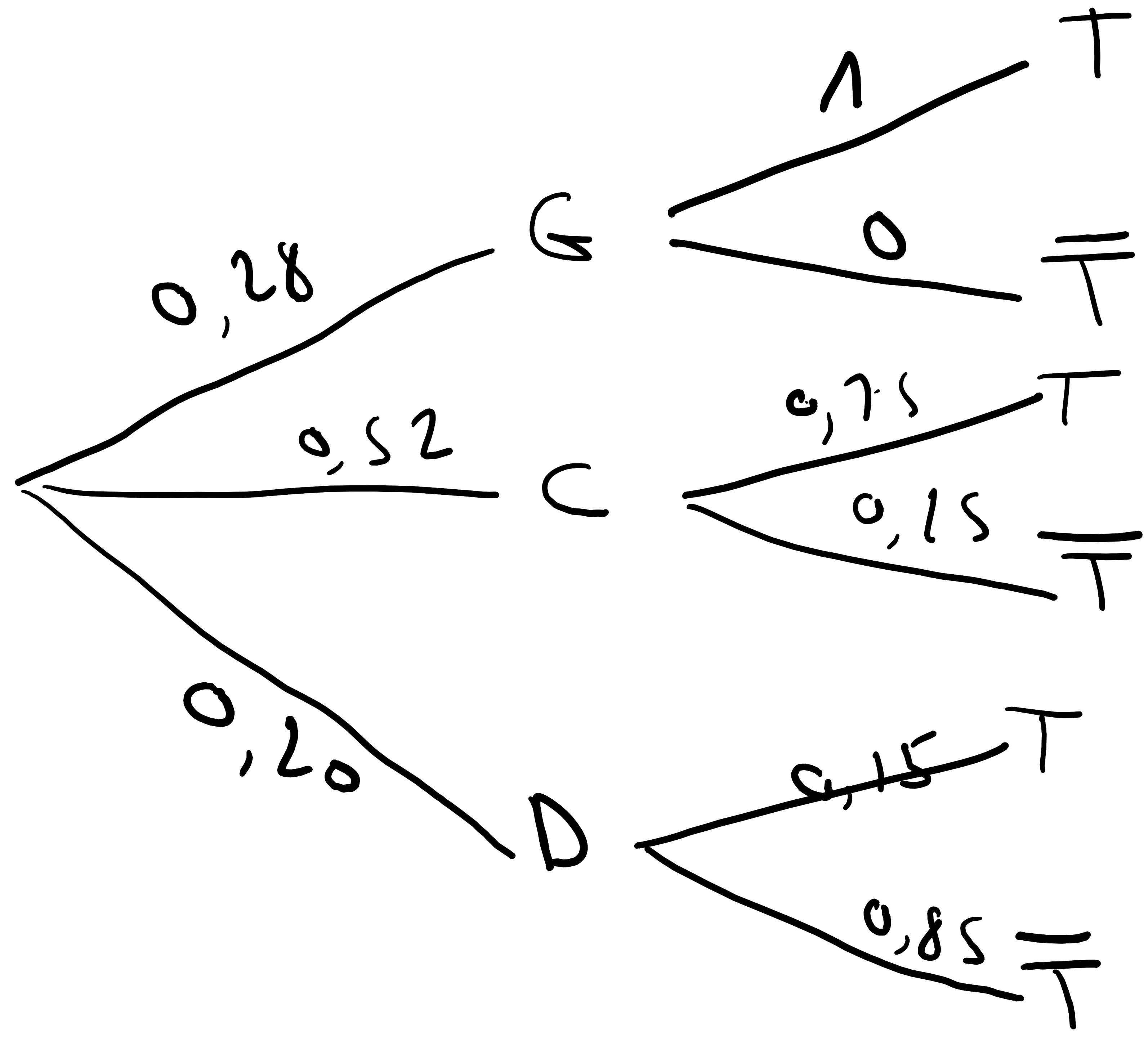
Exercice 2 :



$P(G) = 0,28$

$P(D) = 0,2$

$P(C) = 0,52$

$P_C(T) = 0,75$

$P_C(\overline{T}) = 0,25$

2) $P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T) = 0,52 \times 0,75$

$P(C \cap T) = \underline{0,39}$

3) a) $P(T) = P(C \cap T) + P(G \cap T) + P(D \cap T)$

$P(D \cap T) = P(T) - P(C \cap T) - P(G \cap T)$

$P(D \cap T) = 0,7 - 0,39 - P(G) \times P_G(T)$

$P(D \cap T) = 0,7 - 0,39 - 0,28$

$P(D \cap T) = 0,03$

b) On veut calculer : $P_D(T) = \dfrac{P(D \cap T)}{P(D)}$

$$P_D(T) = \frac{0,03}{0,2} = 0,15$$

Partie B :

1) V suit 1 loi normale $\mu = 120$
$\sigma = 7{,}5$

A la calculatrice, on trouve :
$P(120 < V < 138) \approx 0{,}409$ (arrondi à 10^{3}).

2) On cherche $P(V \geqslant 138)$

$$P(V \geqslant 138) = \frac{1}{2} - P(120 \leqslant V \leqslant 138)$$
$$\approx \frac{1}{2} - 0{,}492$$

$$P(V \geqslant 138) \approx 0{,}008$$

Exercice II :

1) 01/01/2016 : 4 000 abonnés

Chaque mois perd 8% d'abonnés mais 8000 nouveaux

le 1er février il y aura 11680 abonnés

$\left(4000 - \frac{8 \times 4000}{100} + 8000\right)$.

2) a)

Valeur de U	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de n	4	11,7	18,7	25,2	31,2	36,7	41,8
Condition U<40	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

b) l'algorithme affichera $\underline{\underline{6}}$

Cela veut dire, 01/07/2016, il y aura 41800 abonnés.

3) $v_n = u_n - 100$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 100$ et $u_{n+1} = u_n - 0{,}08\, u_n + 8$

$u_{n+1} = 0{,}92\, u_n + 8$

$v_{n+1} = 0{,}92 u_n + 8 - 100$

$v_{n+1} = 0{,}92\, u_n - 92 = 0{,}92(\underbrace{u_n - 100}_{= v_n})$

$v_{n+1} = 0{,}92\, v_n$ suite géométrique

$q = 0{,}92$ et $v_0 = u_0 - 100$
$= -96$

b) Expression de v_n en fonction de n

$$v_n = v_0 \times q^n = -96 \times 0{,}92^n$$

c) On sait que $v_n = u_n - 100$

d'où $u_n = v_n + 100$

$$\underline{u_n = 100 - 96 \times 0{,}92^n}$$

4) $u_n > 70$ (nb abonnés supérieur à 70.000).

$$100 - 96 \times 0{,}92^n > 70$$

$$-96 \times 0{,}92^n > 70 - 100 = -30$$

$$0{,}92^n < \frac{30}{96}$$

$$\ln 0{,}92^n < \ln\left(\frac{30}{96}\right)$$ (ln croissante sur $]0; +\infty[$)

$$n \ln(0{,}92) < \ln\left(\frac{30}{96}\right)$$

$$n > \frac{\ln(30/96)}{\ln(0{,}92)}$$ ($0{,}92 < 1$; $\ln(0{,}92) < 0$)

$$n > 13{,}9 \qquad \underline{n = 14}$$

Le nombre d'abonnés dépassera 70.000 le <u>1er mars 2017</u>

Exercice III :

1) Loi uniforme sur $[10 ; 50]$

$$P(15 \leq X \leq 20) = \frac{20-15}{50-10} = \frac{5}{40}$$

$$P(15 \leq X \leq 20) = \frac{1}{8}$$ réponse b

2) $200€ \longrightarrow 100€$ 2 baisses successives

$$\left(1-\frac{t}{100}\right)^2 \times 200 = 100$$

$$\left(1-\frac{t}{100}\right)^2 = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$1-\frac{t}{100} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{t}{100} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$ d'où $t = 100\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$t \approx 29\%$ réponse c

3) f est positive sur $[2 ; 18]$ donc sur $[8 ; 12]$.

réponse d.

4) 53,5 % des sondés Intervalle confiance $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ = $[0,51 ; 0,56]$

Nb de personnes

$$\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,04 \text{ soit } \frac{2}{0,05} = \sqrt{n} = 40$$

Donc $n = 1600$ réponse c

Exercice IV :

$$f(x) = 9x^2(1 - 2\ln x) + 10$$

$(uv)' = u'v + uv'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

1) a) $f'(x) = 18x(1 - 2\ln x) + 9x^2 \times \frac{-2}{x}$

$f'(x) = 18x - 36x\ln x - 18x$

$\underline{f'(x) = -36x\ln x}$

b) signe de $f'(x)$ sur $]0; 1,5]$.

si $x \in]0; 1]$ $\quad x > 0$, $\ln x \leq 0$

si $x \in]1; 1,5]$ $\quad x > 0$, $\ln x > 0$

Tableau de variation :

x	0		1		1,5
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖	↗	19	↘	

2) $f''(x) = -36\ln x - 36$

point d'inflexion $f''(x) = 0$

$-36\ln x - 36 = 0$ d'où $\ln x = -1 = -\ln e$

$\ln x = \ln e^{-1}$

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ donc $\underline{x = e^{-1}}$

$$f''(x) = -36(\ln x + 1)$$

$\ln x + 1 < 0$

$\ln x < -1$

$\ln x < \ln e^{-1}$

$x < e^{-1}$

	0	e^{-1}	1,5
$f''(x)$	+	0	−

f'' s'annule pour $x = e^{-1}$

et change de signe.

3) a) $F(x) = 10x + 5x^3 - 6x^3 \ln x$

F est une primitive de f ?

$$F'(x) = 10 + 15x^2 - 18x^2 \ln x - 6x^3 \times \frac{1}{x}$$

$$= 10 + 15x^2 - 18x^2 \ln x - 6x^2$$

$$= 10 + 9x^2 - 18x^2 \ln x$$

$$= 9x^2(1 - 2\ln x) + 10.$$

$F'(x) = f(x)$

Donc F est une primitive de f sur $]0;1,5]$.

b) $\int_1^{1,5} f(x)\,dx = [F(x)]_1^{1,5} = F(1,5) - F(1)$

$$= 15 + 5(1,5)^3 - 6(1,5)^3 \ln 1,5 - 10 - 5$$

$$= 5(1,5)^3 - 6(1,5)^3 \ln 1,5$$

$\int_1^{1,5} f(x)\,dx \approx \underline{8,66}$. (arrondi à 10^{-2})

Application économique :

proposition 1

f est décroissante sur $]1 ; 1,5]$

$$f(1) > f(1,5)$$

$f(1) \approx 19$ euros

$f(1,5) \approx 13,83$ euros

faux

proposition 2

Valeur moyenne $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

$$\mu = \frac{1}{1,5-1}\int_1^{1,5} f(x)\,dx$$

$\mu \approx \frac{1}{0,5} \times 8,66$ $\mu \approx \underline{17,32 \text{ euros}}$

faux