Exercice III :

1) $1+i = \rho e^{i\theta}$

$\rho = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

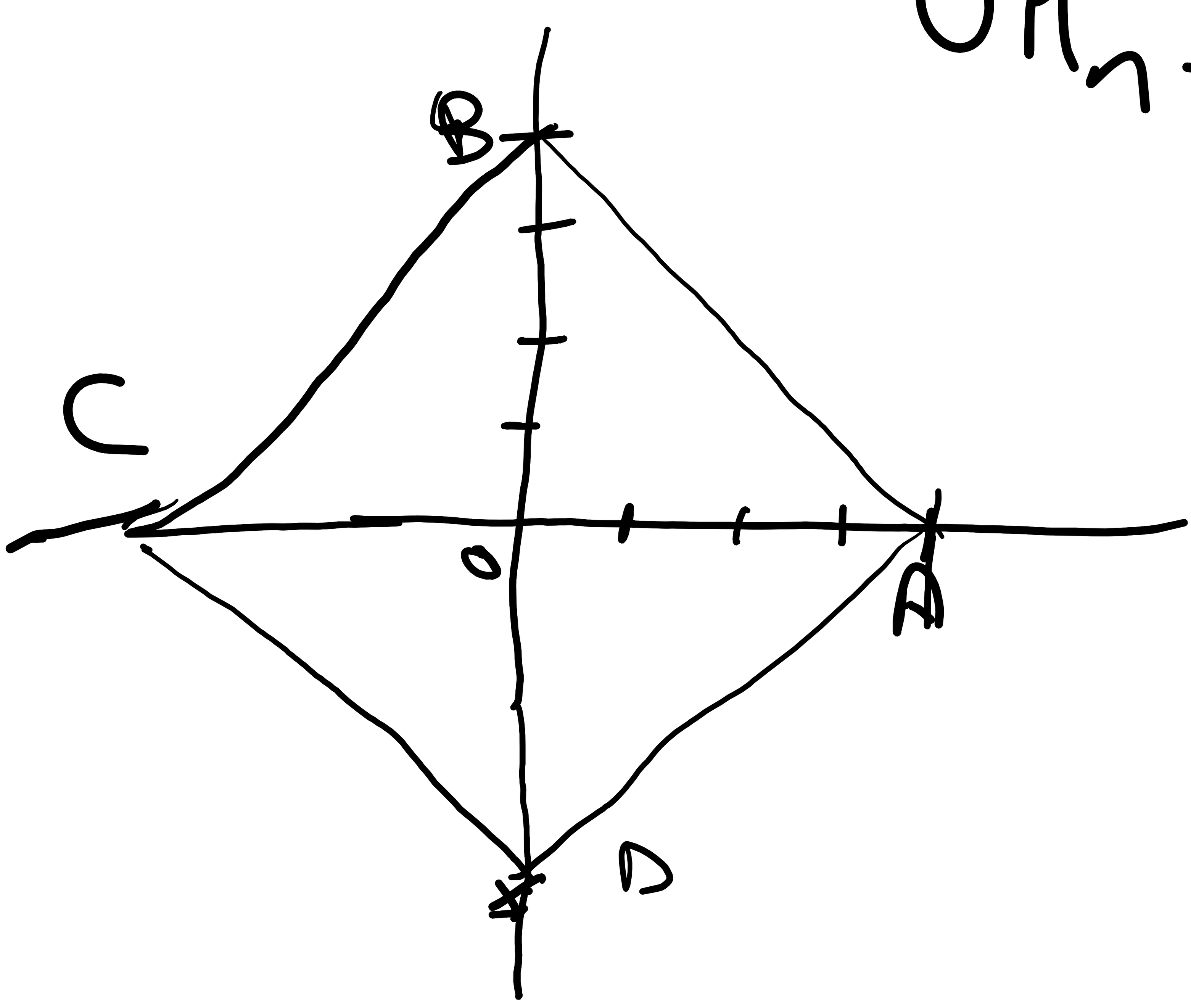
$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

$1+i = \underline{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}$

2) $z_n = (1+i)^n$

M_n est à l'extérieur du carré ABCD (centre O)

$OM_n = |z_n| = |(1+i)^n| = |1+i|^n$



$|z_n| = \sqrt{2}^n$

$\sqrt{2}^n > 4$ donc $\ln \sqrt{2}^n > \ln 4$

$n \ln \sqrt{2} > \ln 4$

$n > \frac{\ln 4}{\ln \sqrt{2}} = 4.$

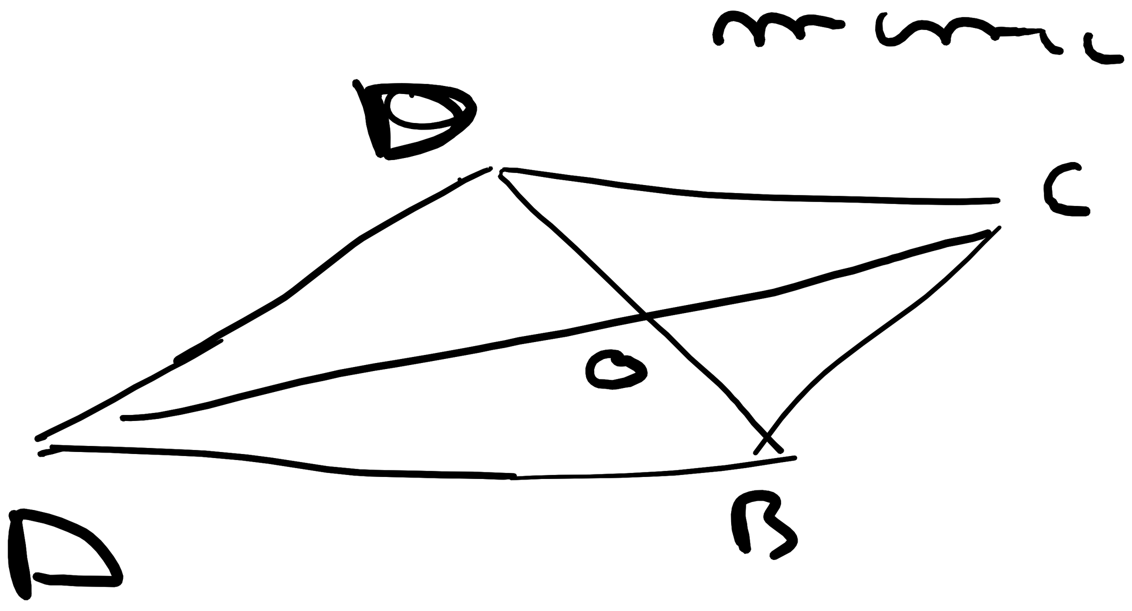
si $n > 4$, alors M_n est extérieur à ABCD.

Exercice IV :

1) $(O, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OS})$ orthonormé.

La base est carrée et Δ équilatéraux

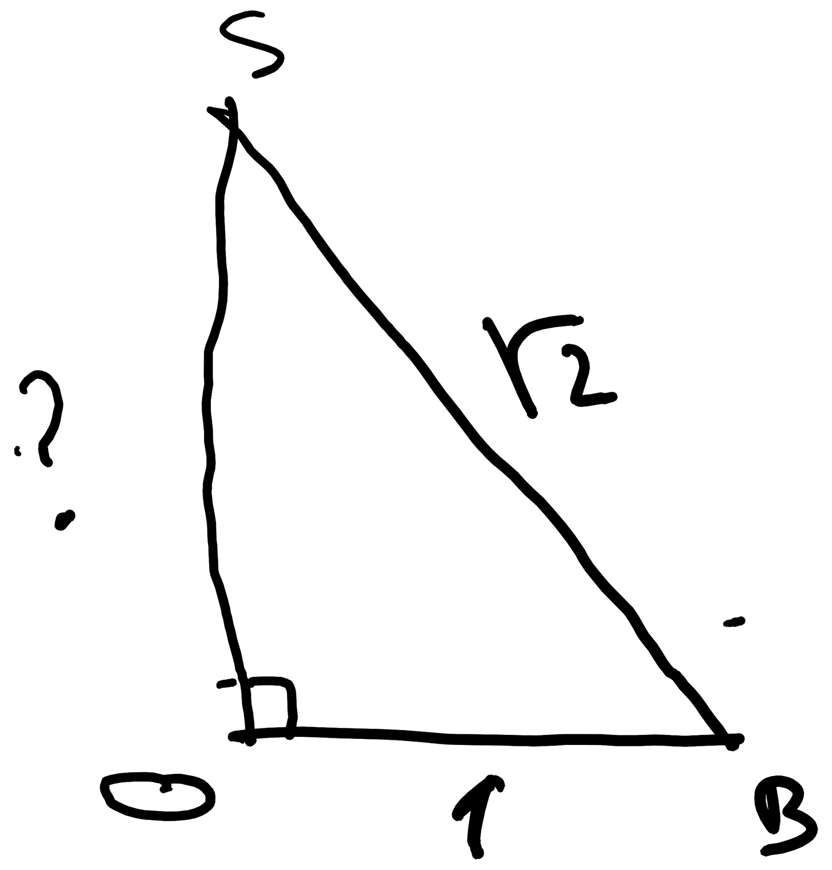
La base étant carrée, les diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement et ont la même mesure

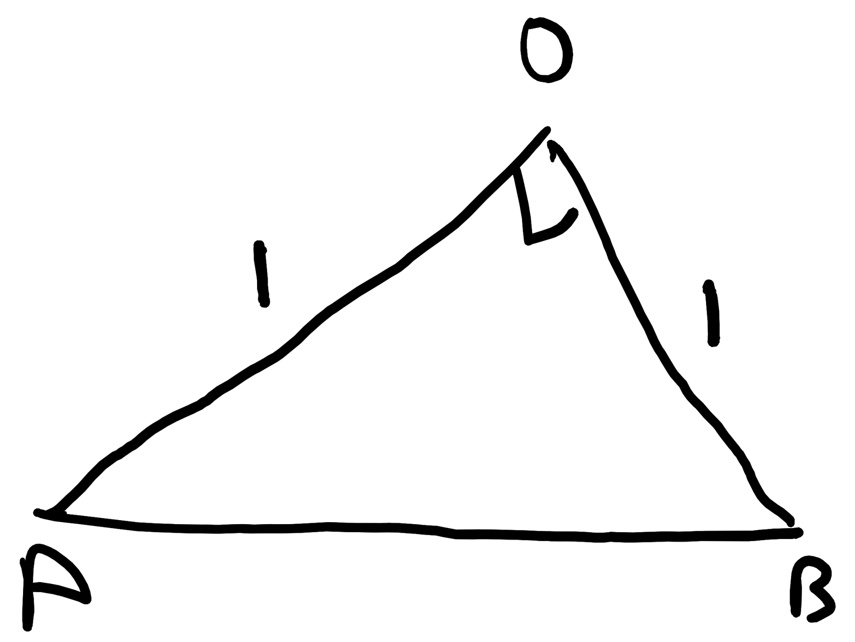


$BD = AC$

$(OC) \perp (OB)$

S est le sommet, la hauteur est $[OS]$
(OS) est perpendiculaire à (OB), (OC)





OAB triangle rectangle en O
Pythagore :

$OA^2 + OB^2 = AB^2$

$AB^2 = 2$ donc $AB = \sqrt{2}$

$AB = AD = DC = CB = \sqrt{2}$ car carré.

Les triangles sont équilatéraux donc les côtés mesurent $\sqrt{2}$

Cherchons OS : OSB Δ rectangle en O

$OS^2 + OB^2 = BS^2$

$OS^2 = BS^2 - OB^2 = 2 - 1 = 1$

$\underline{OS = 1}$

Le repère est donc <u>orthonormé</u>

2) a) Coordonnées de K :

$$\vec{SK} = \frac{1}{3}\vec{SD}$$

$O(0, 0, 0)$
$B(1, 0, 0)$ $\qquad D(-1, 0, 0)$
$C(0, 1, 0)$ $\qquad A(0, -1, 0)$
$S(0, 0, 1)$

$$\vec{SK}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \qquad \vec{SD}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{SK} = \frac{1}{3}\vec{SD}$ donc $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 0 \\ z-1 = -\frac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 0 \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$

$$\underline{K\left(-\frac{1}{3} ; 0 ; \frac{2}{3}\right)}$$

b) B, I et K alignés ? I milieu [SO] $I\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$

$$\vec{BI}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0 \\ 0-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{BI}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{IK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \vec{IK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{3}{6}-\frac{4}{6} = -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Donc $\vec{BI} = 3\,\vec{IK}$

$\vec{BI}$ et $\vec{IK}$ colinéaires, les points I, B et K sont alignés.

c) L intersection de l'arête $[SA]$ avec plan (BCI)

B, I et K alignés.

On définit K' par $\overrightarrow{SK'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$.

on aura donc les points C, I et K' alignés (même démonstration que 2b)).

K' appartient à l'arête $[SA]$ et au plan (BCI)

Donc $\underline{L = K'}$

Exprimons $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{SL}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{DS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SA})$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} \quad \text{(relation Chasles)}$$

$$\underline{\overrightarrow{KL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires

les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d) $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} \cancel{0} - (-1) \\ -1 - 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} x - (-\frac{1}{3}) \\ y \\ z - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ $\quad \begin{cases} x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z - \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$ $\quad \underline{L\left(0 ; -\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)}$

3) a) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1/2\end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC} = -1+1 = 0$ $\quad \vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{BC}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE} = -1+0+\frac{1}{2}\times 2 = 0$ $\quad \vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{BE}$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (BCE)

$\vec{n}$ est le vecteur normal du plan (BCE).

b) $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ coplanaires.

$\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires $\quad \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

On constate que : $\underline{\vec{n} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{DS}}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{DS}$ et $\vec{n}$ sont coplanaires.

c) position (BCE) et (SAD) ?

$\vec{n}$ vecteur normal à (BCE) $\quad$ 3a)

$\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ coplanaires $\quad$ 3b)
il existe une droite d (SAD) dont un vecteur directeur est $\vec{n}$.

<u>conclusion</u> : les plans (SAD) et (BCE) sont <u>perpendiculaires</u>.