Exercice II :

Partie A :

1) $B \in \mathcal{C}_f$ et $D \in \mathcal{C}_f$.

$B(2e, 2)$ et $D(2, 0)$

$x = 2e$: $f(2e) = 2e \ln e - 2e + 2 = 2e - 2e + 2 = 2$.

donc $B \in \mathcal{C}_f$.

$x = 2$: $f(2) = 2 \ln 1 - 2 + 2 = 0 - 2 + 2 = 0$.

donc $D \in \mathcal{C}_f$.

$f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$ $\quad ((uv)' = u'v + uv')$

$f'(x) = 1 \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1/2}{x/2} - 1$ $\quad \left((\ln u)' = \frac{u'}{u}\right)$

$f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

coefficient directeur tangente au point d'abscisse $a = 2$

$f'(2) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) = \ln 1 = 0$. $f'(2) = 0$ donc tangente horizontale

L'axe des abscisses est tangent à la courbe.

2) a) équation droite T qui passe par B et D

coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $a = 2e$.

$f'(2e) = \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = \ln(e) = 1$

$y = f'(2e)(x - 2e) + f(e) = 1(x - 2e) + 2 = x - 2e + 2$.

L'équation de la tangente à la courbe passant par B est :

$$y = x - 2e + 2$$

En déduire les coordonnées de D.

D appartient à l'axe des abscisses donc $y_D = 0$

$D \in T_1$ $\quad y_D = x_D - 2e + 2$

$0 = x_D - 2e + 2$

$x_D = 2e - 2$

D a pour coordonnées : $\underline{D(2e-2\,;\,0)}$

b) * $\mathcal{A}_{AIB} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{AI \times AB}{2}$

$AI = 2 \qquad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$= \sqrt{(2e - 2)^2 + (2 - 2)^2} = 2e - 2$

$\mathcal{A}_{AIB} = \dfrac{2 \times (2e-2)}{2} = 2e - 2$

* $\mathcal{A}_{\text{trapèze } ABDI} = \dfrac{(AB + ID) \times AI}{2} = \dfrac{(2e - 2 + 2e - 4) \times 2}{2}$

$\left(ID = \sqrt{(x_D - x_I)^2 + (\cancel{y_D - y_I})^2}\right.$

$= 2e - 4$

$\mathcal{A}_{ABDI} = 4e - 6.$

unité aire : unité 1 m.

$$\mathcal{A}_{AIB} \leq S \leq \mathcal{A}_{ABDI}$$

Encadrement du volume :
La cuve doit mesurer <u>5 m</u> de long

$$5 \times \mathcal{A}_{ABD} \leq V \leq 5 \times \mathcal{A}_{ABDE}$$

$$5 \times (2e - 2) \leq V \leq 5 \times (4e - 6)$$

$$10e - 10 \leq V \leq 20e - 30$$

Le volume est compris entre $10e - 10\ m^3$ et $20e - 30\ m^3$.

3) a) Si G est une primitive de g alors $G' = g$.

$$G'(x) = \frac{2x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{2x}{4}$$

$$= x \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}$$

$$= x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

b) $f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$

une primitive de f :

$$F(x) = G(x) - \frac{x^2}{2} + 2x = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x$$

c) $$\int_2^{2e} [2 - f(x)]\,dx = \int_2^{2e} 2\,dx - \int_2^{2e} f(x)\,dx$$

$$= 2[x]_2^{2e} - [F(x)]_2^{2e} = 2[2e - 2] - \left[\frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x\right]_2^{2e}$$

$$= 4e - 4 - \left[\frac{4e^2}{2} \ln e - \frac{12e^2}{4} + 4e - \frac{4}{2} \cancel{\ln 1} + \frac{12}{4} - 4\right]$$

$$\int_2^{2e} [2 - f(x)]\,dx = 4e - 4 - [2e^2 - 3e^2 + 4e + 3 - 4]$$
$$= 4e - 4 - [-e^2 + 4e - 1]$$
$$= 4e - 4 + e^2 - 4e + 1$$
$$= e^2 - 3$$

Donc $V = 5 \times (e^2 - 3) \approx 21,94$

Le volume de la cuve est : **$22\,m^3$**

Partie B :

Hauteur d'eau dans la cuve $= f(x)$

Donc on cherche x tel que $f(x) = 1$

$f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ $\quad x \in [2;2e]$

$2 \leq x \leq 2e$ donc $1 \leq \frac{x}{2} \leq e$

$\ln 1 \leq \ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq \ln e$ soit $0 \leq f'(x) \leq 1$

x	2	α	$2e$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(2) = 0$	1	$f(2e) = 2$

f continue et strictement croissante sur $[2;2e]$

TVI : $1 \in [0,2]$ il existe un unique $\alpha \in [2;2e]$ tel que $f(\alpha) = 1$.

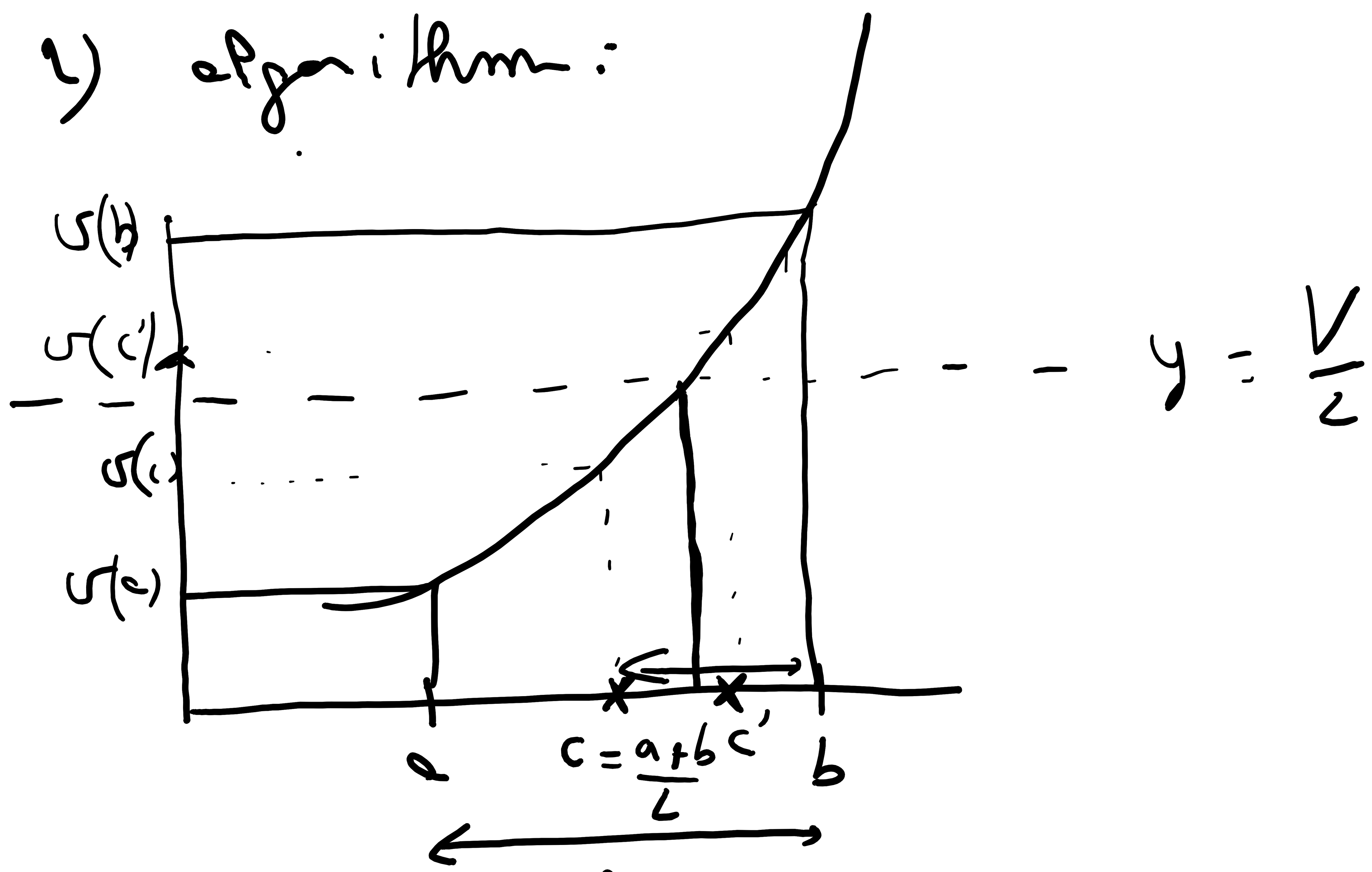
A la calculatrice on trouve $\alpha \approx 4,31$

$\alpha \approx 4{,}31$

Donc $V(\alpha) \approx 7{,}4$

hauteur d'eau = 1m donc il y a environ $7\,m^3$ d'eau.

2) algorithme :



V = volume total

$\frac{V}{2}$

$v(c) < \frac{V}{2}$ alors $c = a$

$v(c') > \frac{V}{2}$ alors $c = b$

on cherche donc à afficher la hauteur d'eau pour que la cuve soit remplie à moitié.