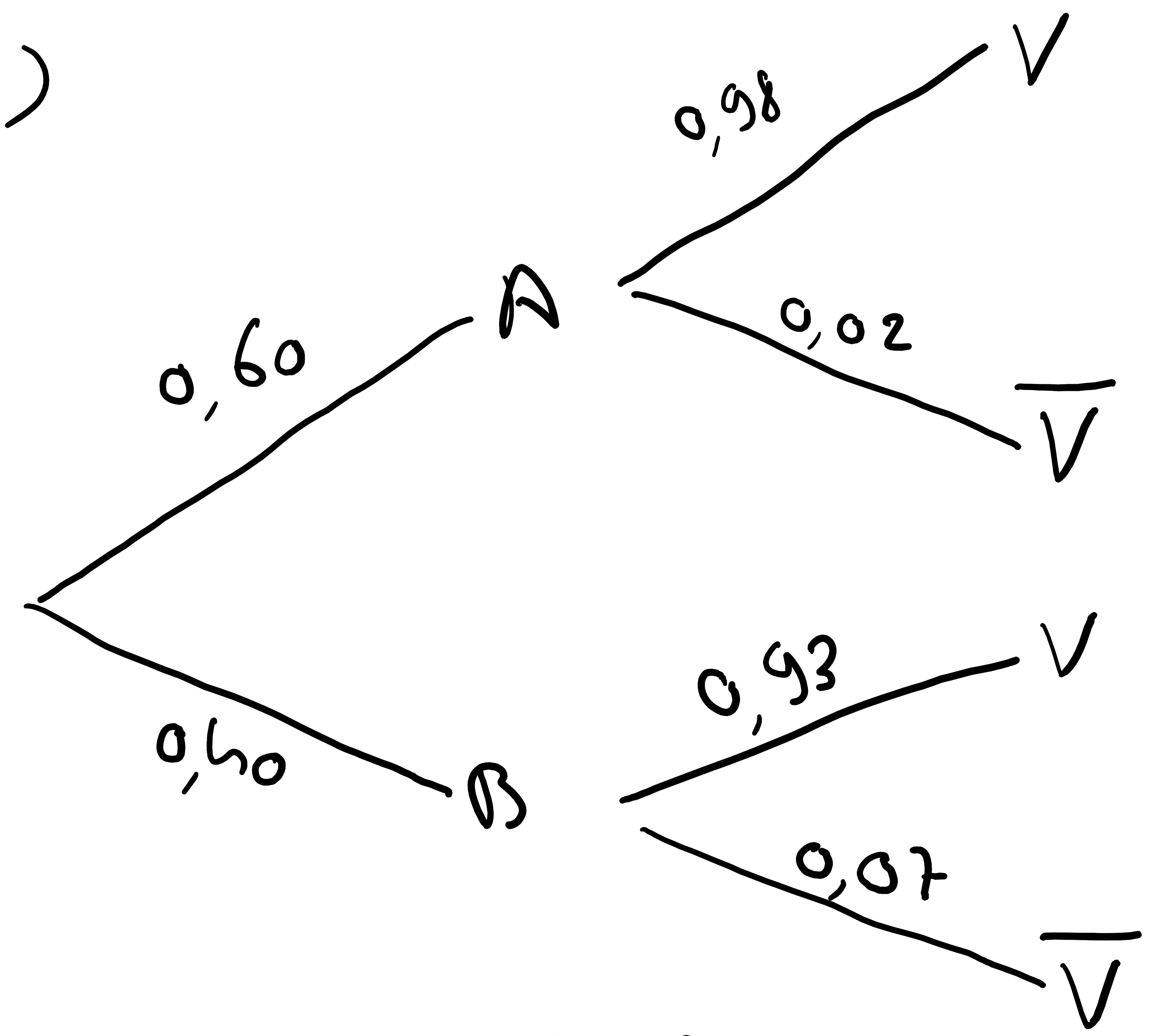
Exercice II :

1)



On doit calculer $P(A \cap V)$

$$P(A \cap V) = 0,60 \times 0,98 = \underline{0,588}.$$

2) $P(B \cap V) = 0,372$?

Par hypothèse $P(V) = 0,96$

Donc $P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B)$ (probabilités totales)

$$P(V \cap B) = P(V) - P(V \cap A) = 0,96 - 0,588$$

$$P(V \cap B) = \underline{0,372}$$

On doit calculer $P_B(V)$:

$$P_B(V) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)} = \frac{0,372}{0,4}.$$

$$P_B(V) = \underline{0,93}$$

3) 70% des billes non vendables proviennent de B.

On sait que les billes ne sont pas vendables on cherche à savoir si elles proviennent de B.

$$P_{\overline{V}}(B) = \frac{P(\overline{V} \cap B)}{P(\overline{V})}$$

$P(V) = 0,96$ donc $P(\overline{V}) = 1 - P(V)$

$P(\overline{V}) = 1 - 0,96 = 0,04$

$P(\overline{V} \cap B) = 0.4 \times 0,07 = 0,028$.

$$P_{\overline{V}}(B) = \frac{P(\overline{V} \cap B)}{P(\overline{V})} = \frac{0,028}{0,04}$$

$P_{\overline{V}}(B) = 0,7$ donc le technicien a raison.

Partie B :

1) une bille peut être vendue si diamètre compris entre 0,9 et 1,1 cm.

On veut calculer : $P(0,9 \leq X \leq 1,1) = ?$

Avec calculatrice, on trouve :

$$P(0,9 \leq X \leq 1,1) \approx 0,93$$

On retrouve le résultat de la question 2 de la partie A.

2) Y suit 1 loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart type σ' (>0)

$$P(0{,}9 \leq Y \leq 1{,}1) = 0{,}98$$

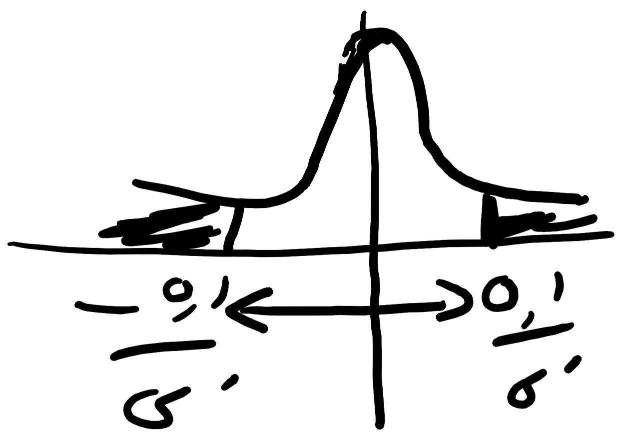
on pose $Y' = \dfrac{Y-\mu}{\sigma'} = \dfrac{Y-1}{\sigma'}$

Y' suit 1 loi normale centrée réduite

$$P(0{,}9 - 1 \leq Y - 1 \leq 1{,}1 - 1)$$

$$= P\left(\frac{-0{,}1}{\sigma'} \leq \frac{Y-1}{\sigma'} \leq \frac{0{,}1}{\sigma'}\right) = 0{,}98$$

$$P\left(-\frac{0{,}1}{\sigma'} \leq Y' \leq \frac{0{,}1}{\sigma'}\right) = 0{,}98$$



$$P\left(-\frac{0{,}1}{\sigma'} \leq Y' \leq \frac{0{,}1}{\sigma'}\right) = 1 - 2P\left(Y' \geq \frac{0{,}1}{\sigma'}\right)$$

$$= 1 - 2\left(1 - P\left(Y \leq \frac{0{,}1}{\sigma'}\right)\right) = 0{,}98$$

$$= -1 + 2P\left(Y \leq \frac{0{,}1}{\sigma'}\right) = 0{,}98$$

$$2P\left(Y \leq \frac{0{,}1}{\sigma'}\right) = 1{,}98 \text{ soit } P\left(Y \leq \frac{0{,}1}{\sigma'}\right) = 0{,}99$$

A la calculatrice : $\dfrac{0{,}1}{\sigma'} \approx 2{,}326$ donc $\underline{\sigma' \approx 0{,}043}$

Partie C :

a) On choisit un sac de billes, il est composé de 40 billes

le sachet contient <u>exactement</u> 10 billes noires.

X variable aléatoire qui compte le nombre de billes noires.

2 issues possibles : → la bille est noire N
→ la bille n'est pas noire $\overline{N}$

$P(N) = \frac{1}{5}$ (couleurs possibles : blanc, bleu jaune, <u>noir</u> et rouge)

X suit la loi binomiale de paramètres
$n = 40$ et $p = P(N) = \frac{1}{5}$

$$P(X=10) = \binom{40}{10} p^{10} \times (1-p)^{40-10}$$

$$P(X=10) = \binom{40}{10} 0{,}2^{10} (0{,}8)^{30}$$

$$P(X=10) \approx 0{,}107.$$

b) $n = 40 \geq 30$
$np = 40 \times 0{,}2 = 8 \geq 5$

$n(1-p) = 32 \geq 5$ Les conditions sont réunies

$$I = \left[p - 1{,}96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}2 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}2 \times 0{,}8}{40}} ; 0{,}2 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}2 \times 0{,}8}{40}}\right]$$

$$= [0{,}076 ; 0{,}324]$$

$f = \frac{12}{40} = 0{,}3$ donc $f \in I$, donc pas de remise en cause.

Probabilité d'obtenir au moins 1 bille noire

$\Rightarrow$ événement contraire 0 bille noire.

Soit X la variable comptant les billes noires
X suit 1 loi binomiale de paramètres
n et $p = 0,2$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{40}{0} 0,2^0 \, 0,8^n = 0,8^n$$

$$P(X \geq 1) \geq 0,99$$

Donc $1 - P(X = 0) \geq 0,99$

$$1 - 0,8^n \geq 0,99$$

$$-0,8^n \geq -0,01$$

$$0,8^n \leq 0,01$$

$$\ln 0,8^n \leq \ln 0,01$$ (ln croissante sur $]0;+\infty[$)

$(\ln e^n = n \ln e)$ $n \ln 0,8 \leq \ln 0,01$

$$n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$$ $0,8 < 1$ ⚠ donc $\ln 0,8 < 0$

$$n \geq 20,64$$

Donc les sachets doivent contenir 21 billes pour que la probabilité d'obtenir 1 bille noire soit supérieure ou égale à 0,99.