Exercice 2 :

1) ~~(a)~~ $f'(0) = -1$ faux car tangente horizontal

~~(b)~~ $f'(-1) = 0$ faux car pas de tangente horizontal.

~~(d)~~ $f'(-3) = 3$ coefficient directeur tangente positif faux

(c) $f'(-3) = -1$ vrai.

2) $g(x) = (x+1)\ln x$ forme (uv) : $(uv)' = u'v + uv'$

$u = x+1 \quad u' = 1$
$v = \ln x \quad v' = \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \times \ln x + (x+1) \times \frac{1}{x} = \ln x + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$ réponse (d)

3) on compte les carrés : $20 < \int_0^{?} h(x)\,dx < 30$

réponse (b)

4) courbe : h'' sur $[0; 2]$ $h''(x) \leq 0$

et sur $[1; 2]$ $h''(x) \leq 0$

donc h est concave sur $[1; 2]$ réponse (a)

Exercice II :

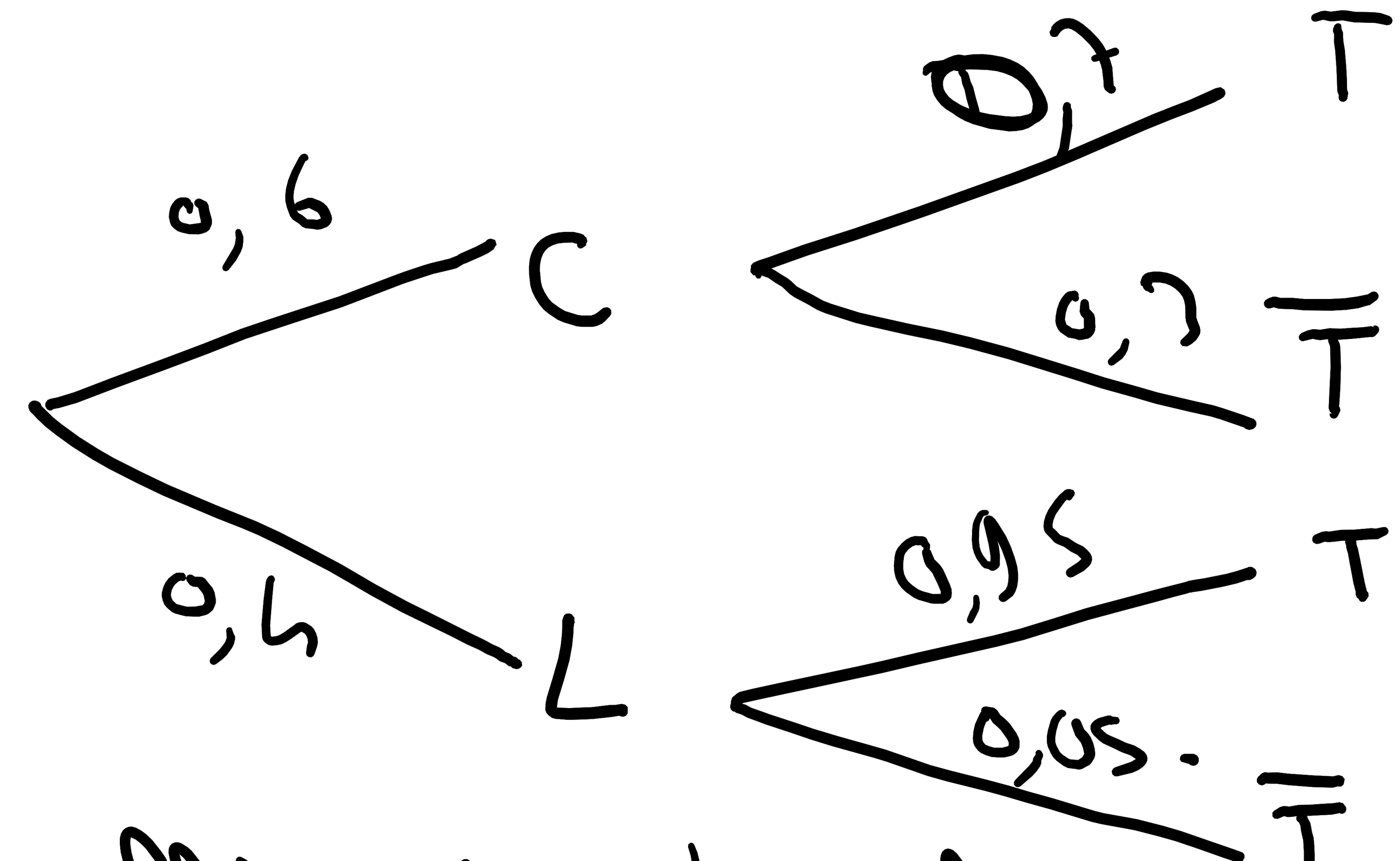
1) 60% de collégiens $\underline{P(C) = 0,6}$

40% de lycéens $\underline{P(L) = 0,4}$

80% des jeunes possèdent un téléphone : $\underline{P(T) = 0,8}$

Parmi les collégiens, 70% possèdent 1 téléphone : $\underline{P_C(T) = 0,7}$

2) arbre :



3) collégien et téléphone portable :

$$P(T\cap C) = P(C)\times P_C(T) = 0,6\times 0,7 = \underline{0,42}$$

4) collégien sachant portable : $P_T(C) = ?$

$$P_T(C) = \frac{P(T\cap C)}{P(T)} = \frac{0,42}{0,8} = \underline{0,525}$$

5) a) $P(T) = P(T\cap C) + P(T\cap L)$ (probabilités totales)

$$P(T\cap L) = P(T) - P(T\cap C) = 0,8 - 0,42 = \underline{0,38}$$

$$P_L(T) = \frac{P(T\cap L)}{P(L)} = \frac{0,38}{0,4} = 0,95$$

b) cf arbre

Partie B

X suit une loi normale $\mu = 2500$ et $\sigma = 650$.

1) $P(2000 \leq X \leq 3000) = \underline{0{,}558}$

2) $P(X \geq 4000) = 1 - P(X \leq 4000)$

$= 1 - 0{,}989 = \underline{0{,}011}$

3) $P(X \leq a) = 0{,}8$

à la calculatrice, on trouve $\underline{a = 3047}$
(arrondi à l'unité)

80% des adolescents envoient moins de 3047 SMS par mois.

Exercice III :

1) a) $u_0 = 75$

En 2016 : $u_1 = u_0 + \frac{12}{100} u_0 + (-6)$

$u_1 = 1,12\, u_0 - 6$

$u_1 = 1,12 \times 75 - 6 = \underline{78}$

b) 12 % de contrats supplémentaires : $u_n + \frac{12}{100} u_n = \underline{1,12 u_n}$
6 contrats résiliés : $\underline{-6}$

Donc $\underline{u_{n+1} = 1,12\, u_n - 6}$

2) a) En sortie : Afficher n
(on veut afficher l'année où le nombre de contrats dépassera 100).

b)

valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7
valeur de u	75	78	81	85	89	94	99	105

c) $\underline{n = 7}$

2015 + 7 = 2022 ; en 2022 le nombre de dossiers dépassera 100 contrats.

3) $u_{n+1} = 1,12\, u_n - 6 \qquad u_0 = 75$

$v_n = u_n - 50$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 50$

$= 1,12\, u_n - 6 - 50 = 1,12\, u_n - 56$

$= 1,12\left(u_n - \frac{56}{1,12}\right) = 1,12\,(\underbrace{u_n - 50}_{= v_n})$

$v_{n+1} = 1,12\, v_n$

(v_n) suite géométrique de raison $q = 1,12$
et de 1er terme $v_0 = u_0 - 50 = 75 - 50 = 25$

b) v_n en fonction de n

$v_n = v_0 q^n$ soit $v_n = 25 \times 1,12^n$

$v_n = u_n - 50$ donc $u_n = v_n + 50$

$\underline{u_n = 25 \times 1,12^n + 50}$

c) $u_n > 100$

$25 \times 1,12^n + 50 > 100$

$25 \times 1,12^n > 50$

$1,12^n > \frac{50}{25} = 2$

$1,12^n > 2$

$\ln(1,12)^n > \ln 2$ ($\ln$ croissante sur $]0;+\infty[$)

$n \ln 1,12 > \ln 2$

$n > \frac{\ln 2}{\ln 1,12} \approx 6,11.$

Donc $n = 7$.

d) On retrouve le résultat de la question 1)c) soit n=7

Exercice IV :

$$f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}$$

Partie A :

1) $f'(x) = -2 + 2e^{-2x+10}$ (car $(e^u)' = u'e^u$)

$f'(x) = 2\left(-1 + e^{-2x+10}\right)$

2a) $f'(x) \geq 0$ d'où $2\left(-1 + e^{-2x+10}\right) \geq 0$

soit $-1 + e^{-2x+10} \geq 0$

$e^{-2x+10} \geq 1 = e^0$ ($e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$)

$-2x + 10 \geq 0$ donc $10 \geq 2x$ soit $\underline{x \leq 5}$.

b) tableau de variation :

x	3		5		13
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-40,6$	$\nearrow$	9	$\searrow$	-6

c) $\displaystyle\int_3^{13} f(x)\,dx = \int_3^{13} \left[-2x + 20 - e^{-2x+10}\right] dx$

$\displaystyle = -2\int_3^{13} x\,dx + 20\int_3^{13} 1\,dx + \frac{1}{2}\int_3^{13} (-2)e^{-2x+10}\,dx$

$\displaystyle = -2\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^{13} + 20\left[x\right]_3^{13} + \frac{1}{2}\left[e^{-2x+10}\right]_3^{13}$

$\displaystyle = -160 + 200 + \frac{e^{-16}}{2} - \frac{e^4}{2}$

$\displaystyle = 40 + \frac{e^{-16}}{2} - \frac{e^4}{2} \approx 12,701$ (arrondi à 10^{-3} près).

Partie B :

1) Selon le tableau de variation, le bénéfice mensuel sera maximum si on fabrique : <u>500</u> toboggans

Le bénéfice sera donc de <u>9000</u> euros

2) Le bénéfice moyen : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

$$\mu = \frac{1}{13-3}\int_3^{13} f(x)\,dx = \frac{1}{10}\left[40 + \frac{e^{-16}}{2} - \frac{e^{4}}{2}\right]$$

$\mu \approx 1000 \times 1,2701 \approx 1270,1$ (€) aux unités exprimées en milliers d'€

bénéfice moyen : <u>1270</u> euros (arrondi à l'euro)

Partie C :

tableau de variation :

[3 ; 5] f est continue et strictement croissante

[5 ; 13] f est continue et strictement décroissante

x	3	α	5	β	13
$f'(x)$	+		0		−
$f(x)$	−40,6 ↗	0	↗ 9 ↘	0	↘ −6

D'après le TVI, il existe $\alpha \in \,]3;5[$ tq $f(\alpha) = 0$
il existe $\beta \in \,]5;13[$ tq $f(\beta) = 0$

A la calculatrice on trouve : $3,73 < \alpha < 3,74$

$9,99 < \beta < 10$

Le bénéfice sera positif si $x \in [374 ; 1000]$.