$= 1 + \ln e - \ln(1+e)$
(car $\ln ab = \ln a + \ln b$).

Partie B :

1) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+ne^{1-x}}$

$f_0(x) = \dfrac{1}{1+0} = 1$
(cf schéma).

2) $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

$f_n(x) = \dfrac{1}{1+ne^{1-x}}$ $f_n(x) > 0$ sur $[0,1]$.

c'est l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$

$u_0 = \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1$

$u_0 = 1$ u.a. (unité d'aire).

3) conjecture : (u_n) semble être décroissante

Prenons : $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx - \int_0^1 f_n(x)\,dx$

$\left(\begin{array}{l} \int f+g = \int f + \int g \\ \int \lambda f = \lambda \int f \end{array} \right)$ $= \int_0^1 [f_{n+1}(x) - f_n(x)]\,dx$

$= \int_0^1 \left[\dfrac{1}{1+(n+1)e^{1-x}} - \dfrac{1}{1+ne^{1-x}}\right]dx$

$$= \int_0^1 \frac{\cancel{1+ne^{1-x}} - \cancel{1} - (n+1)e^{1-x}}{(1+(n+1)e^{1-x})(1+ne^{1-x})} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{-e^{1-x}}{(1+(n+1)e^{1-x})(1+ne^{1-x})} dx$$

$(1+(n+1)e^{1-x})(1+ne^{1-x}) > 0$

$-e^{1-x} < 0$

donc $\frac{-e^{1-x}}{(1+(n+1)e^{1-x})(1+ne^{1-x})} < 0$

D'où $u_{n+1} - u_n < 0$ $\quad u_{n+1} < u_n$

la suite (u_n) est décroissante

4) $u_n > 0$ (car $f_n > 0$ positivité de l'intégrale $f > 0$ donc $\int f > 0$)

La suite (u_n) est <u>décroissante</u> et <u>minorée</u>

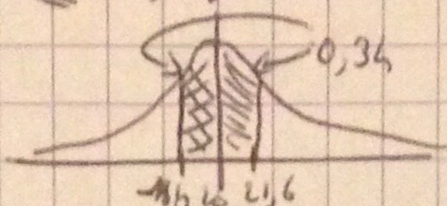
Elle est donc <u>convergente</u> et par conséquent

$\lim_{+\infty} u_n = L.$

Exercice IV :

1) Affirmation 1 :

$$P(20 \leq X \leq 21,6) = 0,34$$



$$P(20 - 1,6 \leq X \leq 20 + 1,6) = 2 \times P(20 \leq X \leq 21,6) = 0,68$$

(symétrie par rapport à μ).

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$$

donc $\sigma \approx 1,6$

$$P(X > a) = \frac{1}{2} - P(\mu < X < a)$$

$$P(X > 23,2) = \frac{1}{2} - P(20 < X < 23,2)$$

$$P(X > 23,2) \approx 0,023$$

Affirmation fausse

2) Affirmation 2 :

$$|Z| = \frac{|iz|}{|z-2|} = 1 \text{ soit } |iz| = |z-2|$$

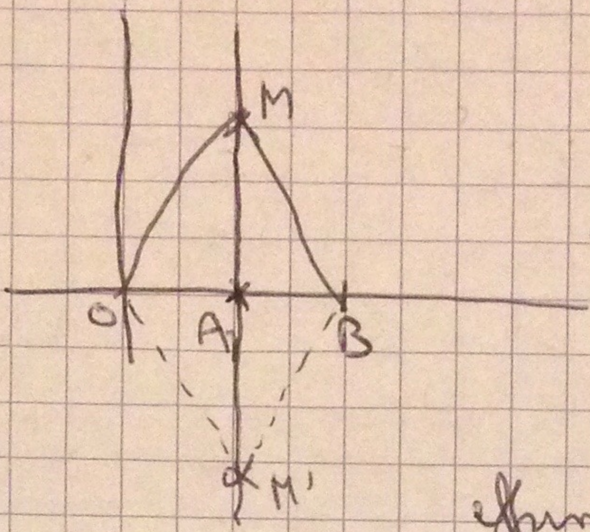
donc $|i| \cdot |z| = 1|z| = |z-2|$

d'où $|z - 0| = |z - 2|$

M a pour affixe z
O a pour affixe 0
B a pour affixe 2

$OM = BM$

Conclusion : $OM = BM$
c'est la médiatrice du segment [OB]



A a pour affixe $z_A = 1$.

cette médiatrice passe par $A(1, 0)$.

affirmation vraie.

3) Affirmation 3 :

$$Z = \frac{iz}{z-2} = \frac{i(x+iy)}{x+iy-2} = \frac{-y+ix}{(x-2)+iy}$$

$$= \frac{(-y+ix)\left[(x-2)-iy\right]}{(x-2)^2+y^2} = \frac{-y(x-2)+xy}{(x-2)^2+y^2} + i\frac{(x-2)x+y^2}{(x-2)^2+y^2}$$

$$= \frac{2y}{(x-2)^2+y^2} + \frac{x^2-2x+y^2}{(x-2)^2+y^2}$$

Donc Z est un imaginaire pur
donc sa partie réelle est nulle

$$\frac{2y}{(x-2)^2+y^2} = 0 \quad \text{soit} \quad y = 0$$

D'où $z = x + iy$ avec $y = 0$

donc $z = x$

ccl : Z imaginaire pur alors z est réel
Affirmation vraie

4) Affirmation 4 :

$$f(x) = \frac{3}{4+6e^{-2x}} = \frac{1}{2}$$

$$6 = 4 + 6e^{-2x}$$
$$3 = 2 + 3e^{-2x}$$

$$1 = 3e^{-2x} \quad \text{soit } e^{-2x} = \frac{1}{3}$$

$$e^{-2x} = e^{\ln\frac{1}{3}} \qquad e^{a} = e^{b} \Leftrightarrow a = b$$

$$-2x = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3 \quad (\text{car } \ln\frac{1}{a} = -\ln a)$$

$$2x = \ln 3 \qquad \text{soit } x = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}$$

$f(x) = 0,5$ admet une unique solution

Affirmation vraie

5) À la calculatrice on trouve

$f(0,54) \simeq 0,4969$

$f(0,55) \simeq 0,5002$

Tant que $y < 0,5$ ← On a $f(0,54) < 0,5$

Donc l'algorithme s'arrête dès que $y > 0,5$

Donc il s'arrête et affiche $x = 0,55$

Affirmation fausse

Exercice V :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} i z_n + 5 \end{cases}$$

1) a) $u_n = z_n - z_A$

$u_{n+1} = z_{n+1} - z_A$ avec $z_A = 4 + 2i$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} i z_n + 5 - z_A$$

$$= \frac{1}{2} i z_n + 5 - 4 - 2i$$

$$= \frac{1}{2} i z_n + 1 - 2i$$

$$= \frac{1}{2} i \left(z_n + \frac{1}{i} - 2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} i \left(z_n + \frac{1-2i}{i} \right) = \frac{1}{2} i \left(z_n - 2 - i \right)$$

$$\frac{1-2i}{i} = \frac{(1-2i)i}{i^2} = -(i+2) = -2-i = -\frac{1}{2}(4+2i)$$

Donc $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \left(z_n - (4+2i) \right)$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} i \left(z_n - z_A \right)$$

$$\underline{u_{n+1} = \frac{1}{2} i u_n}$$

b) $u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$

$u_0 = 0$

<u>Initialisation</u> : $u_0 = -4-2i$

Car $u_0 = z_0 - z_A = 0 - z_A = -z_A$) <u>vrai</u>

<u>Hérédité</u> : on suppose que le résultat est vrai au rang n et on doit montrer qu'il est vrai au rang n+1

$u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$

$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2} i\right) u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)\left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$

Donc $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2} i\right)^{n+1} (-4-2i)$

Donc propriété vraie au rang n+1.

<u>Conclusion</u> : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$

2) $A : z_A$ $\quad M_n : z_n$ $\quad M_{n+4} : z_{n+4}$

$z_A = 4+2i$ $\quad z_n = u_n - z_A$ $\quad z_{n+4} = u_{n+4} - z_A$

$\overrightarrow{AM_n} : z_n - z_A = u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$

$\overrightarrow{AM}_{n+4} : z_{n+4} - z_A = u_{n+4} = \left(\frac{1}{2} i\right)^{n+4} (-4-2i)$

$= \left(-\frac{1}{2} i\right)^4 u_n = \frac{1}{16} u_n$

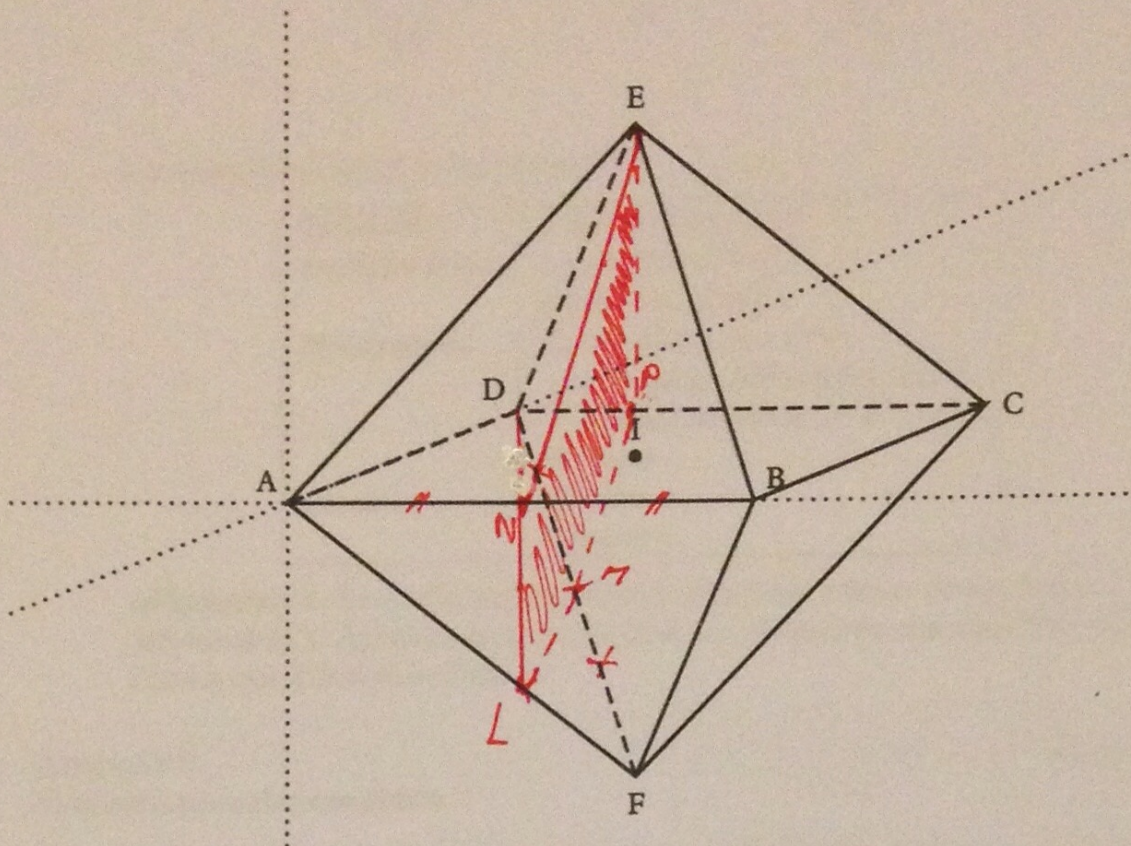
donc $\overrightarrow{AM}_{n+4} = \frac{1}{16} \overrightarrow{AM}_n$, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

2c)

Annexe

À rendre avec la copie

Exercice 1



Exercice 3

1)