Exercice I :

1)a) $A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $D(0,1,0)$ $K(0,0,1)$.

I centre du carré ABCD.

Le triangle IEC est rectangle en I.

$$IE^2 + IC^2 = EC^2 \quad ①$$

$IC = \frac{1}{2} AC$ $AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $AC = \sqrt{2}$
(ABC rectangle en B et chaque arête=1)

$IC = \frac{\sqrt{2}}{2}$

① $IE^2 = EC^2 - IC^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ $(EC = 1)$

$IE^2 = 1 - \frac{2}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Donc $IE = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\underline{IE = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

I milieu de [AC] et de [BD]

coordonnées : I milieu de [BD] $\underline{I\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}, 0\right)}$

coordonnées : E $\underline{E\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

coordonnées : F $\underline{F\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)}$.

b) $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\vec{AE}\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\vec{AB}(1, 0, 0)$

$\vec{AB}$ et $\vec{AE}$ ne sont pas colinéaires

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\vec{n} \cdot \vec{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \frac{1}{2} \\ +\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{AB}$ et à $\vec{AE}$.

$\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (ABE).

$\vec{n}$ est le vecteur normal du plan (ABE).

c) Équation cartésienne du plan (ABE)

$ax + by + cz + d = 0$ $\quad \vec{n}(a, b, c)$.

donc $0.x - 2y + \sqrt{2}z + d = 0$

$-2y + \sqrt{2}z + d = 0$

$A \in (ABE)$ donc $-2y_A + \sqrt{2}z_A + d = 0$

soit $d = 0$

Le plan (ABE) a pour équation : $\underline{-2y + \sqrt{2}z = 0}$

2) a) (FDC) et (ABE) parallèles:

$C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{DC} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$

$D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{DC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{FD}\begin{pmatrix}0-\frac{1}{2}\\ 1-\frac{1}{2}\\ 0-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{pmatrix}$ $\vec{FD}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

$\vec{n}$ vecteur normal à (ABE)

$\vec{FD}$ et $\vec{DC}$ non colinéaires

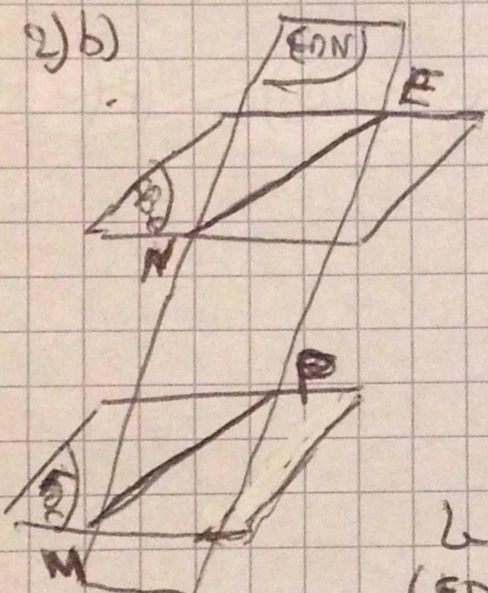
$\vec{n}\cdot\vec{FD} = \begin{pmatrix}0\\ -2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = 0-1+1 = 0$

$\vec{n}\cdot\vec{DC} = \begin{pmatrix}0\\ -2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = 0$

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\ -2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (FDC)

Les 2 plans ne sont pas confondus, ils sont donc <u>parallèles</u>.

2) b)



M milieu [DF] donc il appartient aux deux plans (EMN) et (FDC)

(EMN) et (FDC) sont sécants en une droite passant par le point M.

Question 2) a) on sait que : (ABE) et (FDC) sont parallèles.

Le plan (EMN) coupe les deux plans (FDC) et (ABE) en deux droites parallèles.

Le plan (EMN) coupe le plan (AEB) en la droite (EN), il coupe le plan (FDC) en la parallèle à (EN) passant par M, la droite (MP) sur le graphique.

Exercice II :

Partie A :

1) Le lance balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité

La balle a une chance sur 2 d'être envoyée à droite

$P(D) = \frac{1}{2} = p$

Loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,5$

$$P(X = 10) = \binom{20}{10} p^{10} (1-p)^{20-10}$$

$$= \binom{20}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P(X = 10) \approx 0,176$$

2) On cherche $P(5 \leq X \leq 10) = ?$

A la calculatrice

$$P(5 \leq X \leq 10) = P(X = 5) + P(X = 6) + \dots + P(X = 10)$$

$$P(5 \leq X \leq 10) \approx 0,582.$$

Partie B :

$n = 100$ et $p = 0,5$

$n = 100 \geq 30$

$np = 50 \geq 5$

$n(1-p) = 50 \geq 5$ donc les conditions sont réunies

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[0,5 - 1,96\frac{\sqrt{1/4}}{10} ; 0,5 + 1,96\frac{\sqrt{1/4}}{10}\right]$$

$$= [0,402 ; 0,598]$$

42 balles ont été envoyer à droite

donc :

$$f = \frac{42}{100} = 0,42$$

$f \in [0,402 ; 0,598]$

L'appareil fonctionne correctement

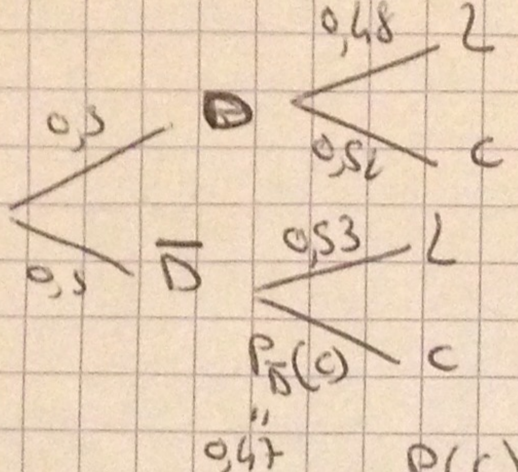
Partie C :

$P(D) = \frac{1}{2}$

$P(D \cap L) = 0,24$ (balle liftée à droite 0,24)

$P(C \cap \bar{D}) = 0,235$ (balle coupée à gauche 0,235)

$P_C(D) = ?$ $\qquad P_C(D) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = ?$



$P(D \cap L) = 0,24$

$P(\bar{D} \cap C) = 0,235$

$P_{\bar{D}}(C) = \frac{P(\bar{D} \cap C)}{P(\bar{D})} = \frac{0,235}{0,5} = \underline{0,47}$

d'où $P_{\bar{D}}(L) = \underline{0,53}$

$P_D(L) = \frac{P(D \cap L)}{P(D)} = \frac{0,24}{0,5} = \underline{0,48}$

d'où $P_D(C) = \underline{0,52}$

$P(C) = P(D \cap C) + P(\bar{D} \cap C) = 0,5 \times 0,52 + 0,5 \times 0,47 = 0,495$

$P_C(D) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = \frac{0,5 \times 0,52}{0,495} = \frac{0,52 \times 0,5}{0,495}$

$P_C(D) \approx 0,525$

Exercice III :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{1-x}}$$

1) $f'(x) = ?$ forme $\left| \begin{array}{l} \left(\frac{1}{u}\right) : \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2} \\ \text{et } e^u : (e^u)' = u'e^u. \end{array} \right.$

$$f'(x) = \frac{+e^{1-x} > 0}{(1+e^{1-x})^2 > 0}$$

donc $f'(x) > 0$ la fonction est croissante

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{1+e}$ $\nearrow$	$\frac{1}{2}$

2) $\frac{e^x}{e^x+e} = \frac{e^x \times 1}{e^x\left(1+\frac{e}{e^x}\right)} = \frac{1}{1+\frac{e}{e^x}} = \frac{1}{1+e^{1-x}} = f(x)$

3) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e+e^x}\,dx$

forme $\frac{u'}{u}$ donc une primitive est $\ln|u|$.

$\int_0^1 f(x)dx = \left[\ln(e+e^x)\right]_0^1 = \ln 2e - \ln(1+e)$

$= \ln 2 + \ln e - \ln(1+e)$