Exercice I :

1) $f(x) = 3x - x\ln x$

$f'(x) = 3 - \left(\ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 3 - (\ln x + 1)$

$f'(x) = 3 - \ln x - 1$ $\underline{f'(x) = 2 - \ln x}$

réponse c.

2) Suite géométrique $q = 2$ et 1er terme $= 1 = 2^0$

la somme des $\underline{13}$ premiers termes

$$S = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q}$$

$$S = 1 \times \frac{1 - 2^{13}}{1 - 2} = \underline{8\,191}$$

réponse b

3) $P(3 \leq X \leq 7) = \frac{4}{5}$ $\left(\neq \frac{1}{4}\right)$ faux

$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2}$ $\left(\neq \frac{9}{5}\right)$ faux

$P(X \geq 4) = \frac{3}{5}$ et $P(2 \leq X \leq 5) = \frac{3}{5}$

réponse b.

4) intervalle de confiance : $I_c = \underbrace{\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}_{\text{amplitude } = \frac{2}{\sqrt{n}}}$.

amplitude $= 0,02 = \frac{2}{\sqrt{n}}$

d'où $\sqrt{n} = \frac{2}{0,02} = 100$ soit $\underline{n = 10000}$

réponse c.

Exercice 2 :

Partie A :

1) Le coût quotidien de l'entreprise est minimal pour une production d'environ 4,5 tonnes (graphiquement)

2) a) $C(6) \approx 5$

$R(6) \approx 18$

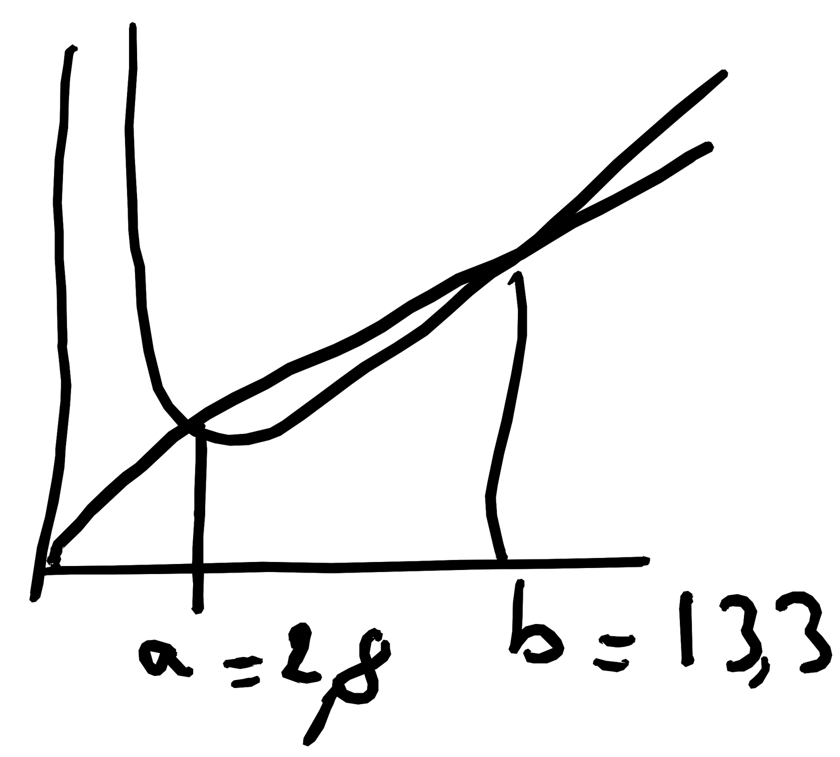
résultat net : $D(6) = R(6) - C(6)$

$= 18 - 5 = 13$

résultat net quotidien : $13 \times 100 = $ 1300 euros

b) résultat net positif :

graphiquement :



Partie B :

$$f(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$$

1) a) $f'(x) = -0,6 - 1e^{-x+5} = -(\underbrace{0,6 + e^{-x+5}}_{>0})$

donc $f'(x) < 0$ sur $[1;15]$.

b) $f'(x) < 0$, la fonction est décroissante sur $[1;15]$.

Suite exercice 2

Partie B :

2) a) tableau de variation

x	1		α		15
$g'(x)$			$-$		
$g(x)$	$g(1)$ >0	$\oplus$	0	$\ominus$	<0 $g(15)$

$g(1) = -0{,}6 + 4 + e^{4}$

$g(1) \approx 58$

$g(15) = -9 + 4 + e^{-10}$

$g(15) \approx -5$

b) $g(x) = 0$

La fonction est continue et strictement décroissante

$g(1) > 0$ et $g(15) < 0$ $\quad 1 \in [1;15]$ et $0 \in [g(15); g(1)]$.

il existe un unique $\alpha \in [1;15]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

A la calculatrice on trouve : $\alpha \approx 6{,}91$ à 10^{-2} près

$g(6) > 0$

$g(7) < 0$ $\qquad 6 < \alpha < 7$

$g(6{,}91) > 0$ $\qquad 6{,}91 < \alpha < 6{,}92$

$g(6{,}92) < 0$

c)
$$\begin{cases} \text{si } x \in [1; \alpha[& g(x) > 0 \\ \text{si } x = \alpha & g(x) = 0 \\ \text{si } x \in]\alpha; 15] & g(x) < 0 \end{cases}$$

partie C :

1) $D(x) = R(x) - C(x)$

$= 3x - (0,3x^2 - x + e^{-x+5})$

$= 3x - 0,3x^2 + x - e^{-x+5}$

$D(x) = 4x - 0,3x^2 - e^{-x+5}$

2) $D'(x) = 4 - 0,3 \times 2x + e^{-x+5}$ $\left[(e^u)' = u'e^u\right]$

$= -0,6x + 4 + e^{-x+5}$

$D'(x) = g(x)$

3) Variations de D

x	1		α		15
$D'(x)$		$+$	0	$-$	
$D(x)$	$D(1)$	$\nearrow$	$D(\alpha)$	$\searrow$	$D(15)$

4) a) Le bénéfice sera maximal si $x = \alpha$

avec $\alpha \approx 6,9$ tonnes (à 10^{-1} près)

b) Le bénéfice sera donc :

$D(6,9) \approx 4 \times 6,9 - 0,3 \times 6,9^2 - e^{-6,9+5}$

$D(6,9) \approx 13,17$

Soit 1317 euros.

Exercice 3 :

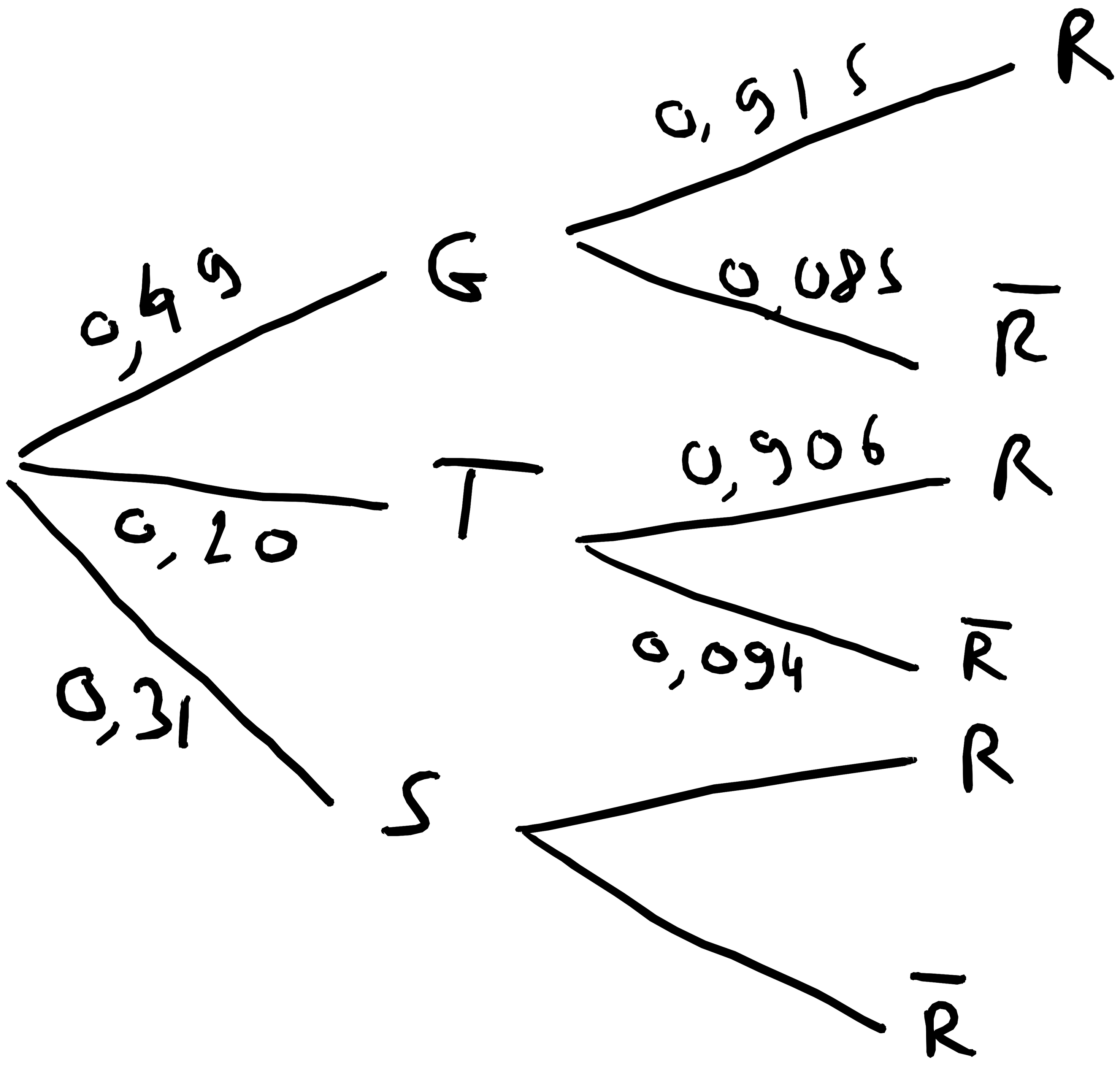
1) 49 % bac général $P(G) = 0,49$

20 % bac techno $P(T) = 0,2$

91,5 % bac général reçus $P_G(R) = 0,915$

90,6 % bac techno reçus $P_T(R) = 0,906$

2) arbre :



3) bac techno et reçu : $P(T \cap R) = 0,2 \times 0,906$

$$\underline{P(T \cap R) = 0,1812}$$

4) a) taux global réussite : $P(R) = 0,878$.

$P(R) = P(R \cap G) + P(R \cap T) + P(R \cap S)$

donc $P(R \cap S) = P(R) - [P(R \cap G) + P(R \cap T)] = 0,2484$

$P(R \cap S) = 0,24845$

b) $P_S(R) = \dfrac{P(R \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,24845}{0,31}$ $\quad \underline{P_S(R) \approx 0,801}$

Suite exercice 3 :

Partie B

1) Calculatrice : $P(9 \leq X_n \leq 16) \approx 0,68$ (arrondi au centième)

2) * Graphique 3 : courbe trait plein

$\mu \approx 10$ ou $\mu = 13,2$

donc impossible.

* $P(9 \leq X_F \leq 16) \approx 0,88$ (calculatrice)

$P(9 \leq X_n \leq 16) < P(9 \leq X_F \leq 16)$

Car la fonction associée à la variable X_F est inférieure à la fonction associée à X_n

Donc le graphique 1 ne convient pas

* Le bon graphique correspond au graphique 2

Exercice 4 :

1) a) $u_0 = 5700$.

$$u_1 = u_0 + \frac{1,5}{100} u_0 - 300 = 1,015\, u_0 - 300$$

$$u_1 = 5485,5$$

b) $u_2 = 1,015\, u_1 - 300$ donc $5267,78 = u_2$

2) a) calculatrice

Valeur de u	5700	5485,5	5267,78	5046,8
Valeur de n	0	1	2	3
u > 4500 Vrai/Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai

4822,5	4594,8	4363,8
4	5	6
Vrai	Vrai	Faux

b) l'algorithme affichera 6

Capital restant sera inférieur à 4500 euros.

3) a) $v_n = u_n - 20.000$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 20.000 = 1,015\, u_n - 300 - 20\,000$

$= 1,015\, u_n - 20.300$

$= 1,015 \left(u_n - \frac{20300}{1,015} \right) = 1,015(\underbrace{u_n - 20.000}_{= v_n})$

$v_{n+1} = 1,015\, v_n$

v_n suite géométrique de raison $q = 1,015$
et de 1er terme $v_0 = u_0 - 20.000 = 5700 - 20000$
$v_0 = -14300$

v_n en fonction de n : $v_n = v_0 \times q^n$
$v_n = -14300 \times (1,015)^n$

b) $u_n = v_n + 20000$
$u_n = -14300 \times 1,015^n + 20.000$

4) a) 26 avril 2017, soit $n = 15$
$u_{15} = 20.000 - 14300 \times 1,015^{15} \approx 2121,68$

b) remboursement intégral
$u_n \leq 0 \Leftrightarrow 20.000 - 14300 \times 1,015^n \leq 0$
$20.000 \leq 14300 \times 1,015^n$
$\frac{20\,000}{14300} \leq 1,015^n$

($\ln \nearrow$ sur $]0;+\infty[$) $\ln\left(\frac{20000}{14300}\right) \leq \ln 1,015^n = n \ln 1,01$
($\ln 1,015 > 0$)
$\frac{\ln\left(\frac{20.000}{14300}\right)}{\ln 1,015} \leq n$ soit $22,5 \leq n$

$n = 23$, il faudra 23 mensualités pour tout rembour

c) Montant de la dernière mensualité :

$u_{22} \approx 157,84$. (calculatrice)

Dernière mensualité $157,84 \times 1,015 \approx \underline{160,21}$

$\underline{160,21 \text{ euros}}$

d) Coût total de son achat :

Le mensualité est $= 300$ € (22 fois puis la dernière mensualité 160,21)

Donc $300 \times 22 + 160,21 = 6760,21$

L'emprunteur aura donc déboursé $\underline{6760,21 \text{ Euros}}$