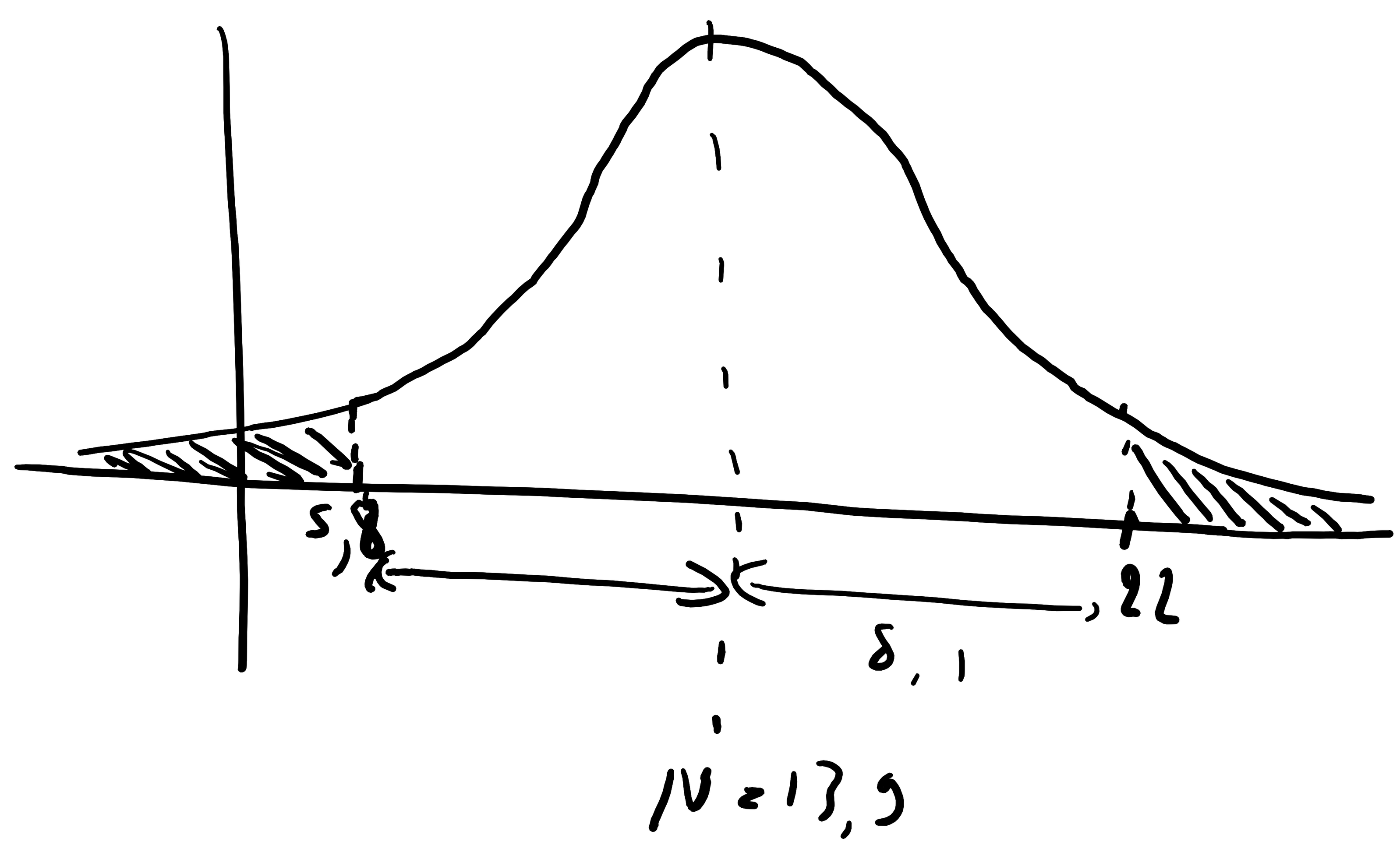
Exercice 1 :

1) a) $P(T \geq 22) = 0,023$

$\mu = 13,9$ courbe symétrique par rapport à l'axe $x = \mu$.



par symétrie $P(X \leq 5,8) = P(X \geq 22)$

b) $P(5,8 \leq T \leq 22) = 1 - [P(X \leq 5,8) + P(X \geq 22)]$

$= 1 - 2 \times 0,023$

$\underline{P(5,8 \leq T \leq 22) = 0,954}$

$P(\mu - 2\sigma \leq T \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$

$13,9 - 2\sigma = 5,8$ donc $2\sigma = 13,9 - 5,8$

soit $\sigma = \frac{13,9 - 5,8}{2} = 4,05$

$\underline{\sigma \approx 4,1}$ (arrondi au dixième).

2) $N(\mu; \sigma^2)$ $P(X < \mu) = \frac{1}{2} - P(X > \mu)$

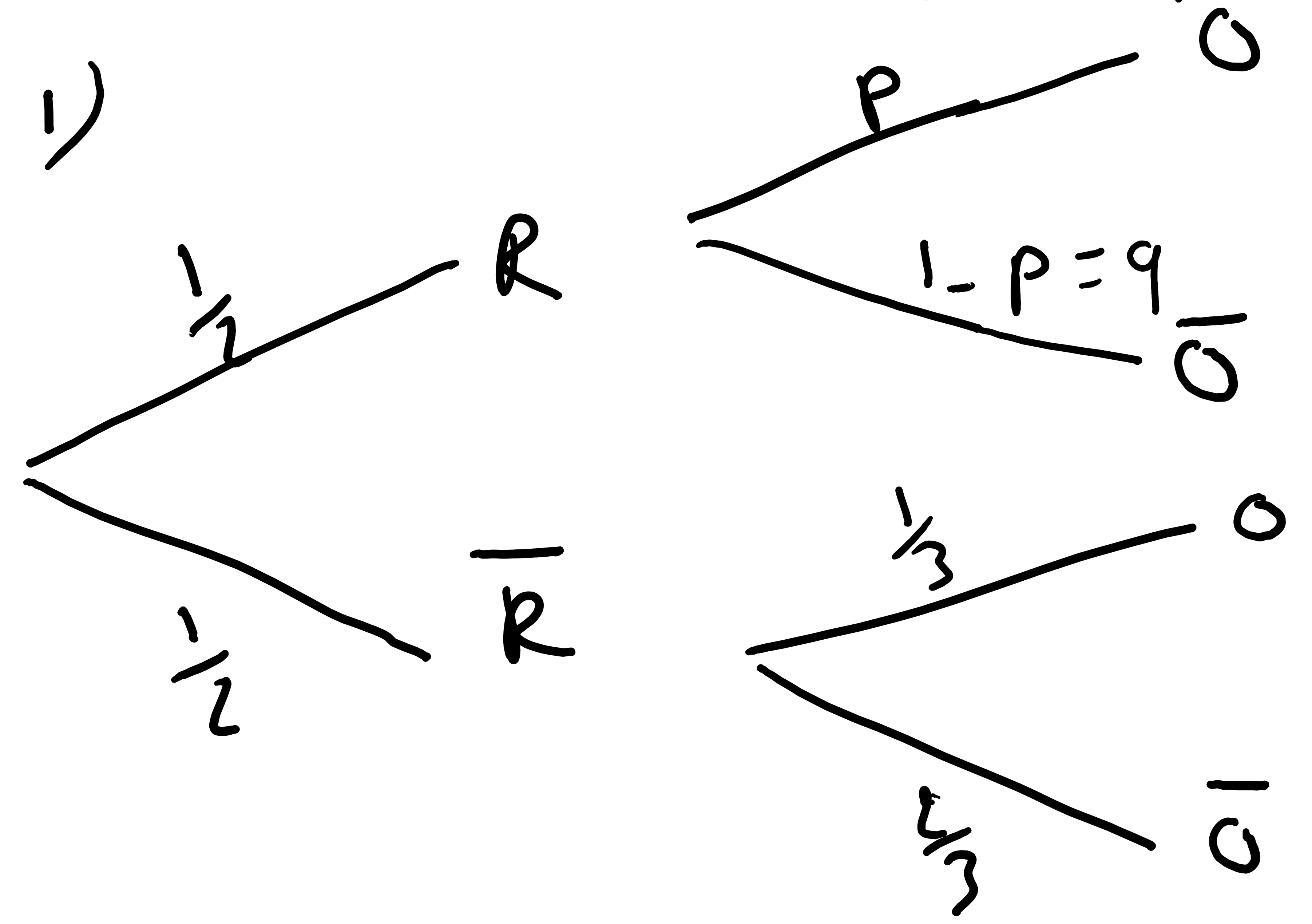
$a > \mu$ $P(X > a) = \frac{1}{2} - P(\mu < X < a)$

$P(X > 18) = \frac{1}{2} - P(13,9 < X < 18) \approx 0,5 - 0,341$
$\approx 0,16$

Partie B :

R : " résultat pair " $\{2;4;6\}$.
O : " réponse oui "

1)



$\overline{R}$: $\{1;3;5\}$.
si 1 ⟶ réponse oui
" 3;5 ⟶ réponse non

$\therefore p = P(O)$

$$q = P(O) = P(R\cap O) + P(\overline{R}\cap O)$$
$$= \frac{1}{2}\times p + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$$

$$\underline{q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}}$$

2) a) Intervalle de confiance

$n = 1500$

$f = \frac{625}{1500} \approx 0{,}417$

$nf \approx 625 \geq 5$
$n(1-f) \approx 874{,}5 \geq 5$

Intervalle de confiance : $I_c = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

$$I_c = \left[0{,}417 - \frac{1}{\sqrt{1500}} ; 0{,}417 + \frac{1}{\sqrt{1500}}\right] \approx [0{,}391 ; 0{,}443]$$

b) $0{,}391 \leq q \leq 0{,}443 \iff 0{,}391 \leq \frac{1}{2}p + \frac{1}{6} \leq 0{,}443$

$0{,}224 \leq \frac{1}{2}p \leq 0{,}276$ soit $0{,}448 \leq p \leq 0{,}553$

Conclusion : 44,8% et 55,3%
Entre 44,8% et 55,3% des jeunes pratiquent au moins 1 fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

Exercice 2 :

1) B affixe -1 et J affixe $\frac{1}{2}i$

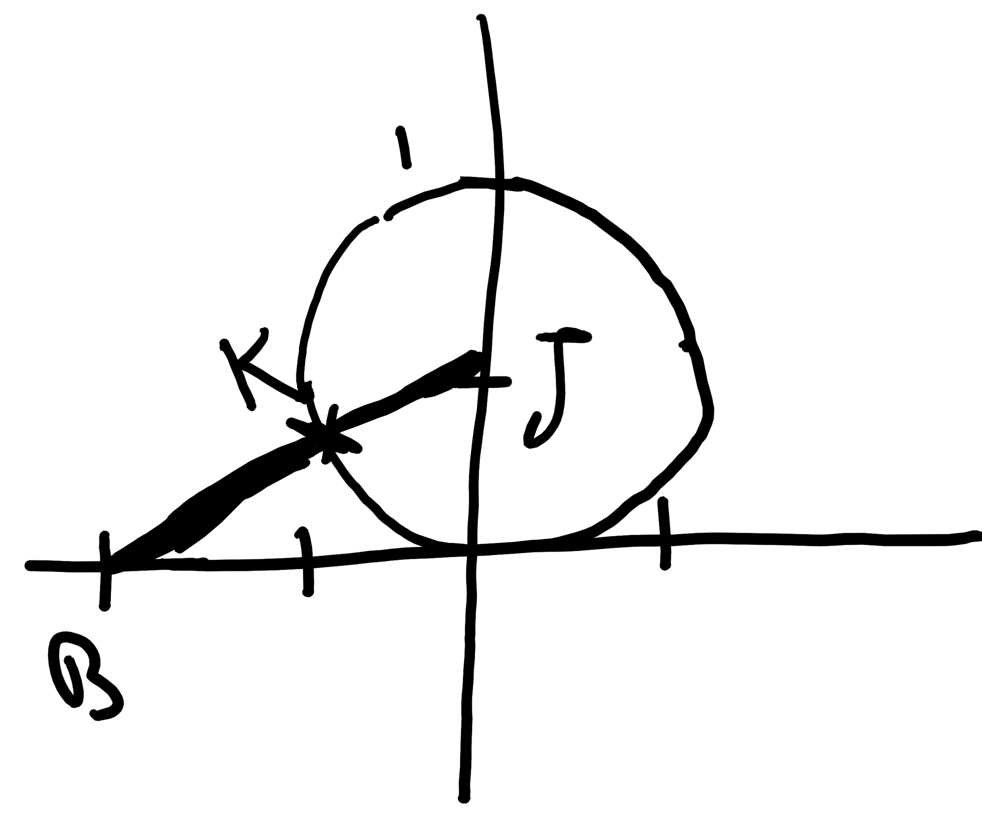
$z_B = -1$ et $z_J = \frac{1}{2}i$

$BJ = |z_J - z_B| = \left|\frac{1}{2}i - (-1)\right| = \left|\frac{1}{2}i + 1\right|$

$BJ = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$.

$BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$

En déduire BK :



$BK = BJ - KJ$

avec $KJ = R = \frac{1}{2}$

donc $BK = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ soit $BK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

2) a) $z_{A_2} = ?$

$(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}}) = \frac{2\pi}{5}$

$(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{5}$

$(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) = \frac{2\pi}{5}$

$(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_2}) = \frac{4\pi}{5}$

$OA_2 = |z_{A_2}| = R = 1$ (car A_2 appartient au cercle trigonométrique de centre O et de rayon $R = 1$.).

Donc $z_{A_2} = \rho e^{i\theta}$

$z_{A_2} = 1 e^{i\frac{4\pi}{5}}$

b) $BA_2^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$?

$$BA_2^2 = |z_{A_2} - z_B|^2 = \left|\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) - (-1)\right|^2$$

$$= \left|\left(1 + \cos\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right|^2$$

$$= \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$= 1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \underbrace{\cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)}_{=1}$$

$$\underline{BA_2^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)}$$

c) $BK = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

$$BA_2 = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)} = \sqrt{2 + 2 \times \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1\right)}$$

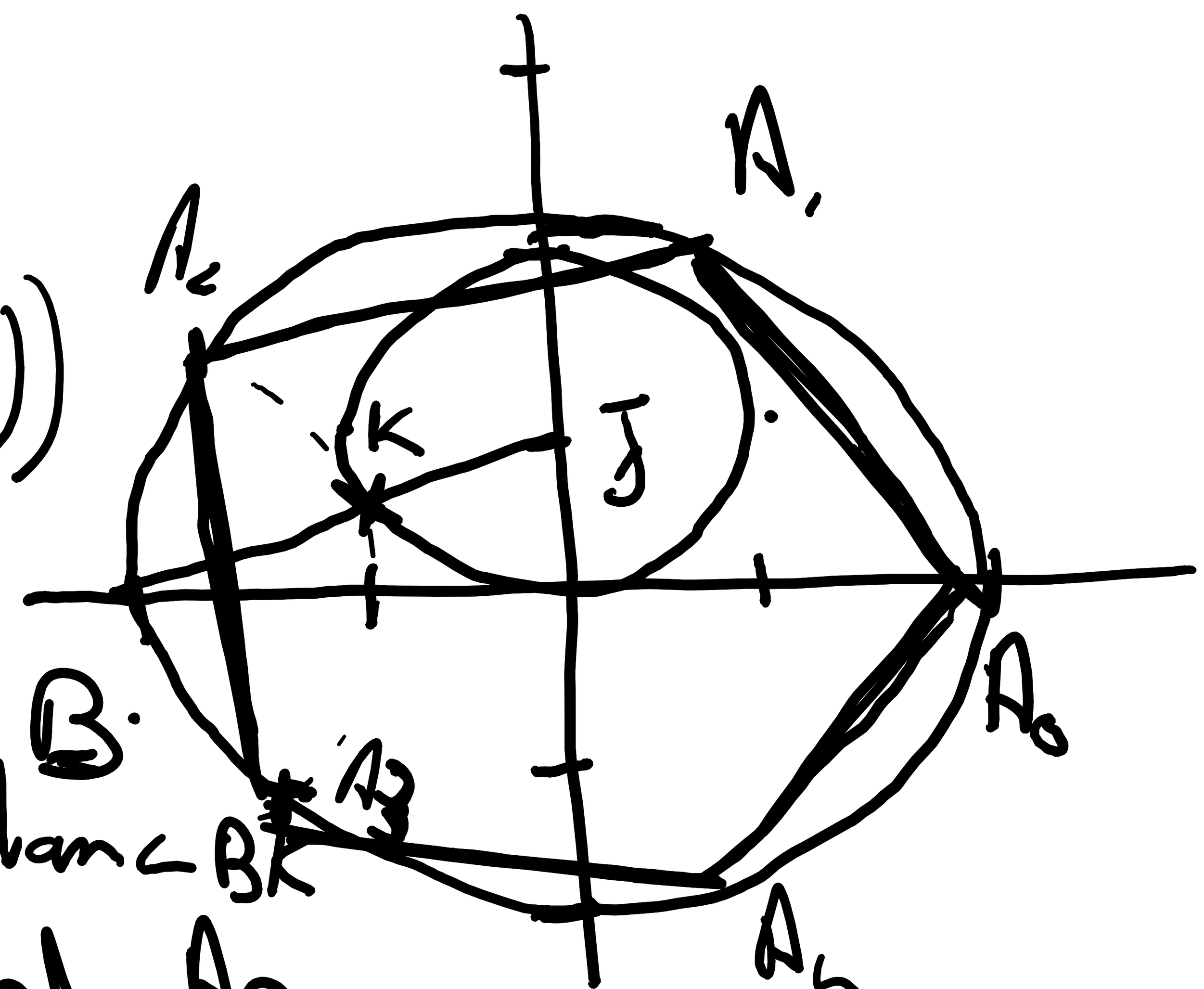
$$= \sqrt{2 + \frac{1}{2}\left(-\sqrt{5} - 1\right)} = \sqrt{\frac{4}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

Grâce au logiciel, on a $\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$

d'où $BA_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

<u>ccl</u> : $\underline{BA_2 = BK}$

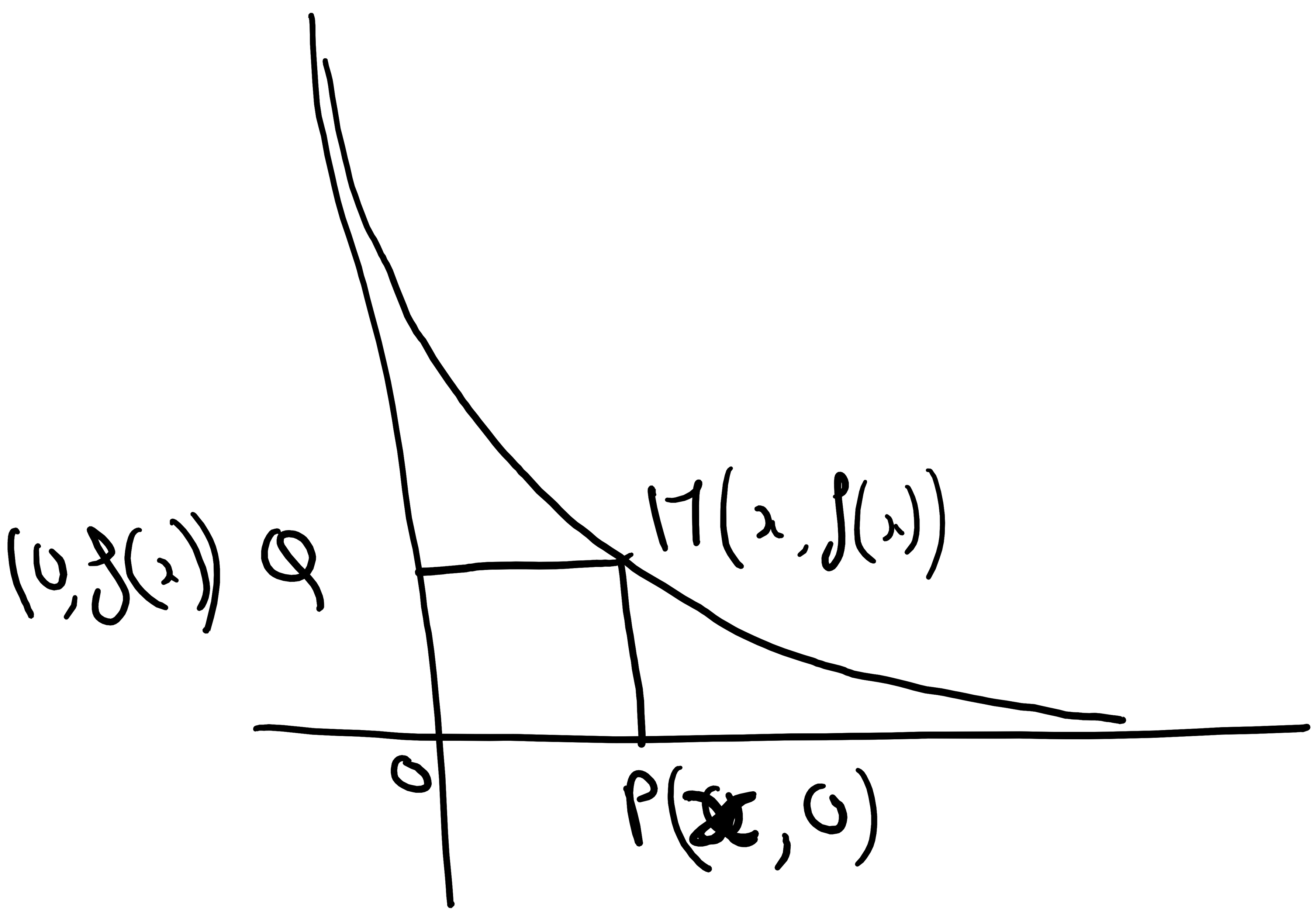
3) on trace le cercle trigo $(\mathcal{C}(0,1))$
on trace le cercle $\mathcal{C}(J, \frac{1}{2})$
et on obtient K
A partir de B, on reporte la distance BK
et on obtient A_2 sur le cercle trigo et A_3



Les segments sont égaux donc $A_2A_3 = A_0A_1 = A_1A_2 = A_3A_4 = A_4A_0$.

Exercice 4 :

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) \qquad x \in]0;14]$$



$$\mathcal{A}_{QMPO} = OQ \times OP$$

$OQ = f(x)$ et $OP = x$

$$\mathcal{A}(x) = x \times f(x) = x\left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$
$$= 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

(dépend de x !).

$$\mathcal{A}'(x) = 2 - \left[1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}}\right]$$

$$\mathcal{A}'(x) = 2 - \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right]$$

$$\mathcal{A}'(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$\mathcal{A}'(x) = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\mathcal{A}'(x) = 0 \iff 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$
$$\iff \ln\left(\frac{x}{2}\right) = 1 = \ln e \qquad (\ln a = \ln b \iff a = b)$$

donc $x = 2e$.

$A'(x) > 0 \iff 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) > 0$

$\iff 1 > \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$\iff \ln e > \ln \frac{x}{2}$

$(\ln a > \ln b \iff a > b)$ $\quad e > \frac{x}{2}$ soit $x < 2e$.

x	0		$2e$		14
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$\nearrow$	$A(2e) = 2e$	$\searrow$	

$A(2e) = 2\times(2e) - 2e\ln(e) = 4e - 2e = 2e$

$A(2e) = 2e$

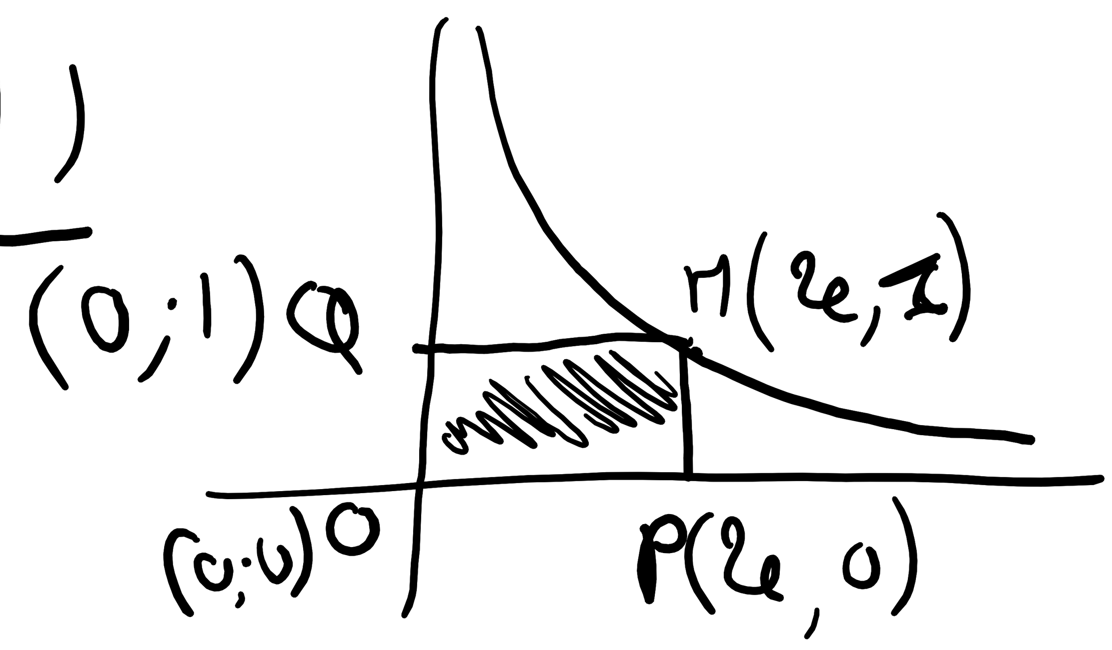
L'aire maximale est atteinte pour $x = 2e$ et vaut $2e$.

Le point M aura pour coordonnées:

$x = 2e$

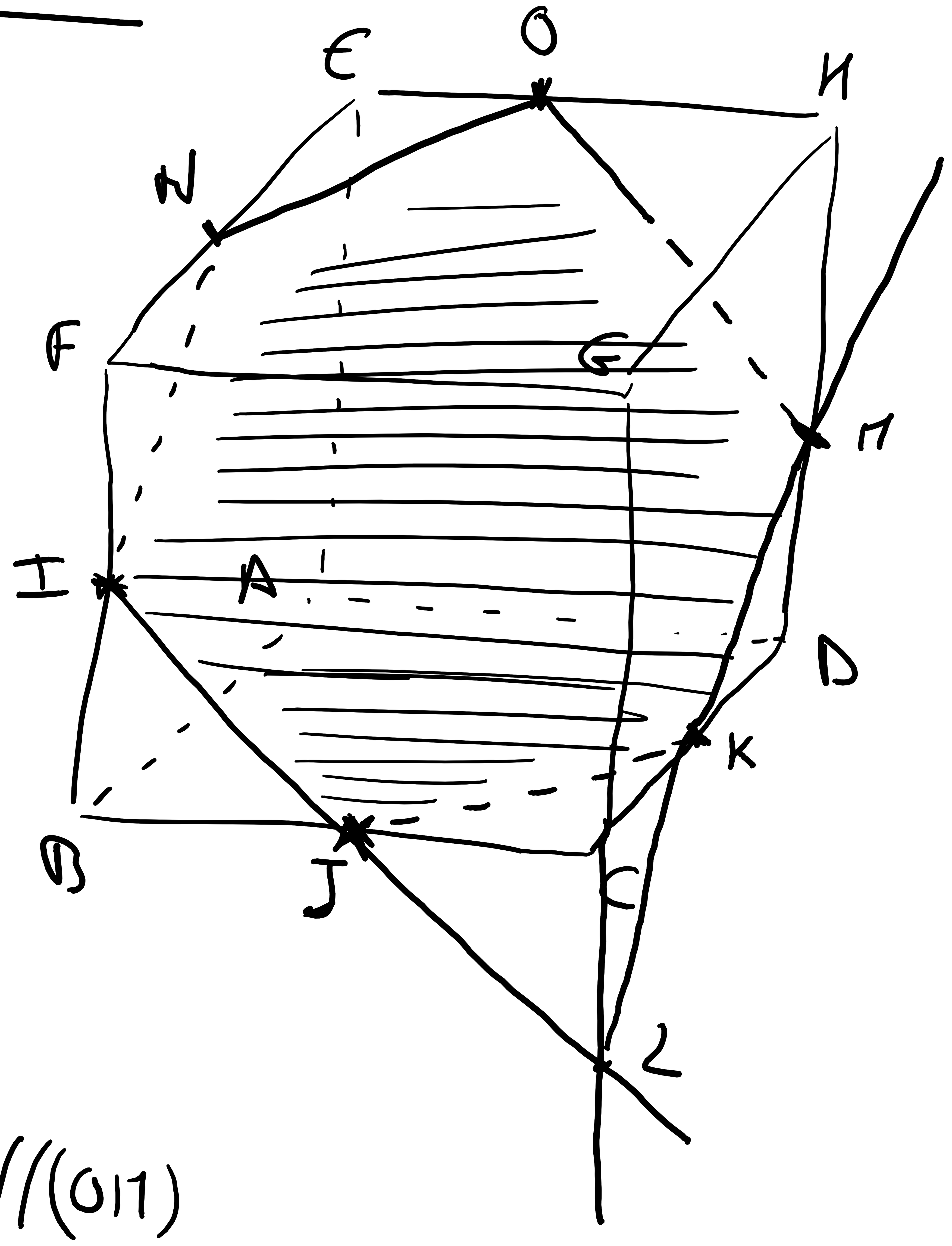
$f(2e) = 2 - \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = 2 - \ln e = 2 - 1 = 1$

$M(2e\,;1)$



Exercice 3 :

Partie A :



$$\begin{cases} (IJ) \parallel (OM) \\ (JK) \parallel (ON) \\ (KM) \parallel (IN) \end{cases}$$

Partie B :

1) repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $D(0,1,0)$ $E(0,0,1)$

$K\left(\frac{1}{2}; 1, 0\right)$ $I\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ $J\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$

$G(1,1,1)$

2) a) $\overrightarrow{AG}\ (1, 1, 1)$

$\overrightarrow{IJ}\ \left(0 ; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{IK}\ \left(-\frac{1}{2} ; 1 ; -\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IK} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0$

$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux

$\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux

$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ non colinéaires

$\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK)

b) $\overrightarrow{AG}$ vecteur normal du plan (IJK)

$$\begin{pmatrix} ax + by + cz + d = 0 \\ \vec{n}\ (a, b, c) \text{ vecteur normal} \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AG}\ (1, 1, 1)$ $\qquad 1x + 1y + 1z + d = 0$

or $I \in (IJK)$

donc $x_I + y_I + z_I + d = 1 + 0 + \frac{1}{2} + d = \frac{3}{2} + d$

$\frac{3}{2} + d = 0$ donc $d = -\frac{3}{2}$

Equation (IJK) :

$$\underline{x + y + z - \frac{3}{2} = 0}$$

3) a) $\vec{AM} = t\vec{AG}$ $\quad$ $\vec{AM}\,(x, y, z)$

$\vec{AG}\,(1, 1, 1)$

$\vec{AM} = t\vec{AG}$ $\quad$ $\vec{AM}\,(t, t, t)$

d'où $\underline{M(t, t, t)}$

$MI^2 = (x_I - x_M)^2 + (y_I - y_M)^2 + (z_I - z_M)^2$

$= (1 - t)^2 + (0 - t)^2 + (\frac{1}{2} - t)^2$

$= 1 - 2t + t^2 + t^2 + \frac{1}{4} - t + t^2$

$= 3t^2 - 3t + 1 + \frac{1}{4}$

$\underline{MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}}$

b) on pose $f(t) = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$

$f'(t) = 6t - 3 = 3(2t - 1)$

t		$\frac{1}{2}$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$		$f(\frac{1}{2})$	

distance minimale si $t = \frac{1}{2}$.

$M(t, t, t)$ donc $\underline{M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$

4) a) $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Les coordonnées de N doivent vérifier l'équation du plan (IJK)

$$x_N + y_N + z_N - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

N appartient au plan (IJK).

b) $\overrightarrow{IN}\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, 0\right)$ $\qquad \overrightarrow{AG}(1, 1, 1)$

$\overrightarrow{BF}(0, 0, 1)$.

$$\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

$\overrightarrow{IN}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{IN}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BF}$

$\left.\begin{array}{l}\text{I est le milieu de [BF]} \\ \text{I appartient à (IN)}\end{array}\right\}$ ces deux droites sont perpendiculaires.

$\left.\begin{array}{l}\text{N appartient à (IN)} \\ \text{N appartient à (AG)}\end{array}\right\}$ ces deux droites sont perpendiculaires

$\left(\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}\right)$

Exercice 4 :

Partie A

1) $T_0 = 25$

$T_1 = 0,85 \times T_0 + 15 = 36,25$

$T_2 = 0,85 \times T_1 + 15 = 45,81$

$T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 = 53,94$

Au bout de 3 minutes, la température de la boîte de conserve sera de 54°C (arrondi à l'unité)

2) $T_{n+1} = 0,85\, T_n + 15$

Montrons que $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$ par récurrence :

Initialisation : $n = 0$ $T_0 = 25$ °C Vrai

Hérédité : on suppose propriété vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $(n+1)$.

$T_{n+1} = 0,85\, T_n + 15 = 0,85\,(100 - 75 \times 0,85^n) + 15$

$= 85 - 75 \times 0,85^{n+1} + 15$

$T_{n+1} = 100 - 75 \times 0,85^{n+1}$

propriété vraie au rang $n+1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n,

$T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$

3) $T_n > 85$ $100 - 75 \times 0,85^n > 85$

$-75 \times 0,85^n > -15$

$$-75 \times 0,85^n > -15$$

$$0,85^n < \frac{15}{75} = 0,2$$

$$\ln(0,85^n) < \ln 0,2$$ (fonction ln croissante sur $]0;+\infty[$)

$$n \ln 0,85 < \ln 0,2$$ $\ln a^n = n \ln a$

$$n > \frac{\ln 0,2}{\ln 0,85}$$ $\ln 0,85 < 0$ ⚠

$$n > 9,90$$

$$n = 10$$

Le stérilisation va débuter au bout de 10 minutes.

Partie B :

1) $f(t) = 100 - 75 e^{-\frac{\ln 5}{10} t}$

$$f'(t) = -75 \times \left(-\frac{\ln 5}{10}\right) e^{-\frac{\ln 5}{10} t}$$

$$f'(t) = \underbrace{7,5 \ln 5}_{>0} \; \underbrace{e^{-\frac{\ln 5}{10} t}}_{>0} > 0$$

t	0		10		$+\infty$
$f'(t)$		+			
$f(t)$	25	$\nearrow$	85	$\nearrow$	

$$f(0) = 100 - 75 = 25$$

b) $f(10) = 100 - 75\, e^{-\frac{\ln 5}{10} \times 10}$

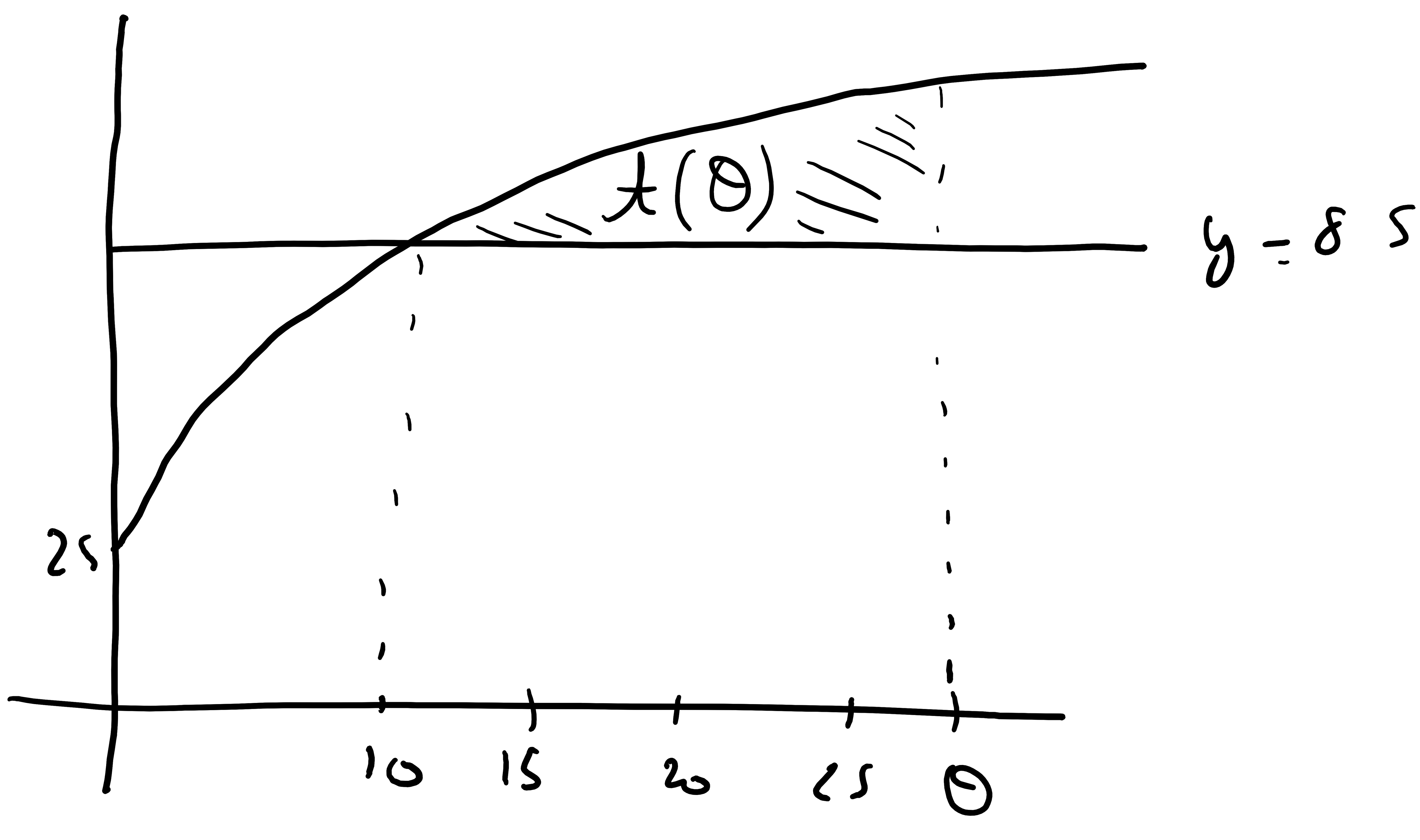
$= 100 - 75 \times e^{-\ln 5} = 85$

$t \geq 10$ $\quad$ f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

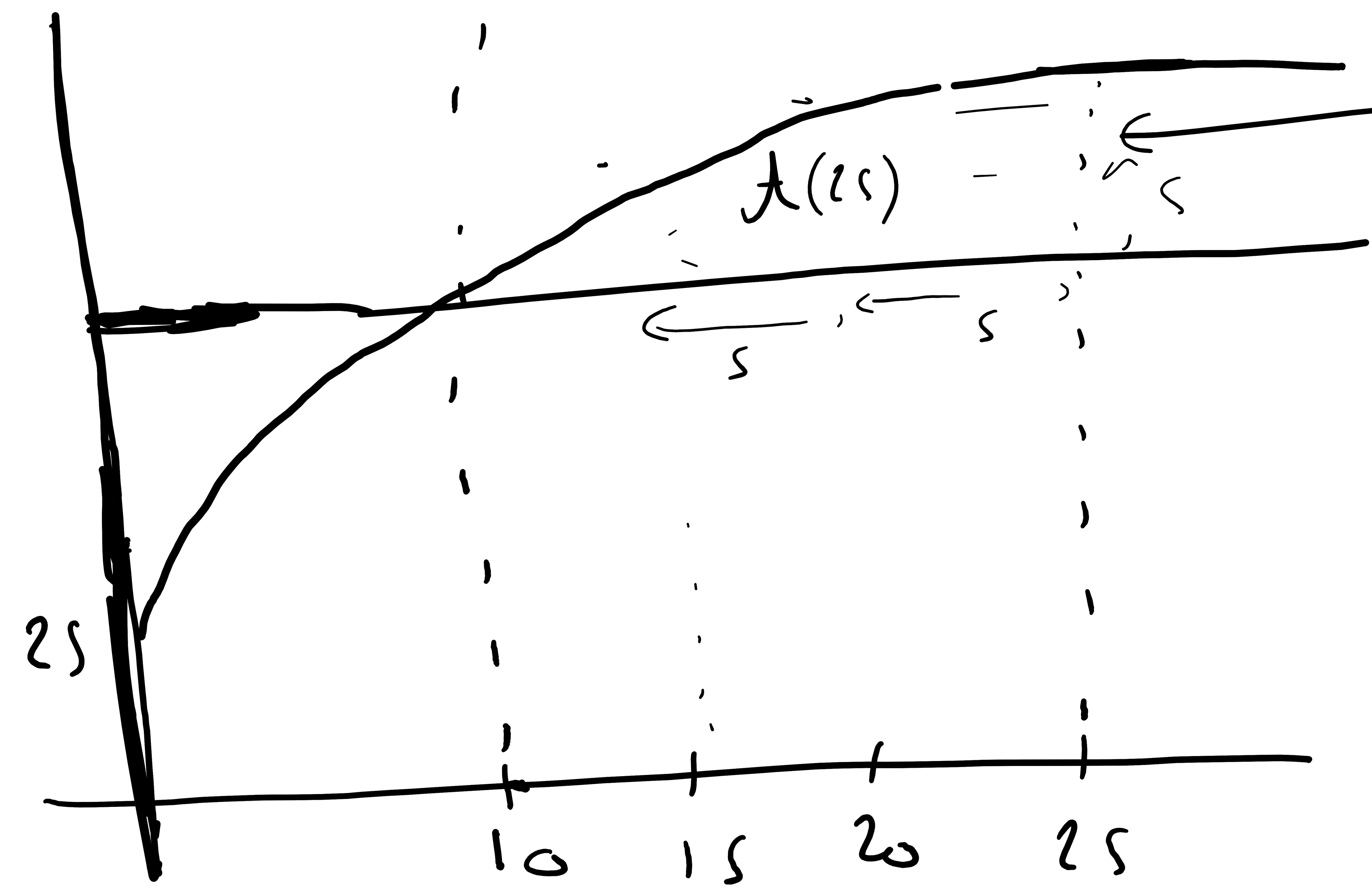
$f(t) \geq f(10)$

$f(t) \geq 85$

2)



$\mathcal{A}(\theta) =$ aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite d'équation $y = 85$ et les droites d'équation $x = 15$ et $x = \theta$



Or on constate qu'il y a 3 rectangles complets hachurés soit : $3\mathcal{A} = 3 \times 25 = \underline{75 \text{ ua}}$

La partie restante est supérieure à un $\frac{1}{2}$ rectangle
donc $\mathcal{A}_{\text{restante}} \geqslant \mathcal{A}_{\frac{1}{2}\text{ rectangle}} = \underline{12{,}5 \text{ ua}}$)

Conclusion : $\underline{\mathcal{A}(25) > 80}$

b) $\mathcal{A}(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} [f(t) - y]\,dt = \int_{10}^{\theta} \left[100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t} - 85\right] dt$

$= \displaystyle\int_{10}^{\theta} \left(15 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) dt = \int_{10}^{\theta} 15\,dt - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt$

$\begin{cases} \int(f+g) = \int f + \int g \\ \int \lambda f = \lambda \int f \end{cases}$

$\mathcal{A}(\theta) = 15\,[t]_{10}^{\theta} - 75\displaystyle\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt = \underline{15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt}$

c) $A(20) = ?$

$$A(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt$$

$$A(20) = 15(20-10) - 75\int_{10}^{20} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,dt$$

$$= 150 - 75\left[\frac{-e^{-\frac{\ln 5}{10}t}}{\frac{\ln 5}{10}}\right]_{10}^{20}$$

$$= 150 - \frac{750}{\ln 5}\left[e^{-\ln 5} - e^{-2\ln 5}\right]$$

$$\approx 75,44$$

$$A(20) = 75,44 < 80$$

<u>Conclusion</u> : La stérilisation n'est pas terminée au bout de 20 minutes.