fiche 8: Calcul intégral

<table>
<tr><th>Définition:</th><th>Représentation graphique:</th></tr>
<tr><td>

Soit une fonction f , *continue et positive* sur un intervalle [a,b] et C_f sa courbe représentative.

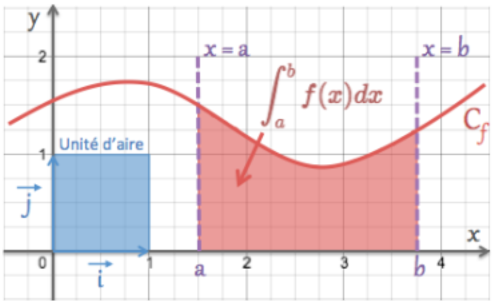
L'aire sous la courbe C_f sur l'intervalle [a,b] est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine D limité par:

1) L'axe des abscisses
2) La courbe C_f
3) Les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

On note $\int_a^b f(x)\ dx$ cette aire et on lit l'intégrale de a à b de f . *(figure 1)*

</td><td>

Figure 1:



Unité d'aire = aire du rectangle construit à partir des points O(0;0); I(1;0) et J(0;1)

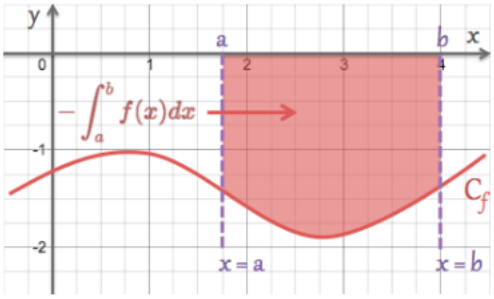
</td></tr>
<tr><td>

Soit une fonction f , *continue et négative* sur un intervalle [a,b] alors la fonction $(-f)$ est *continue et positive* sur $[a\ ;\ b]$.
Alors l'aire cherchée est:

$Aire = \int_a^b (-f(x))\, dx = -\int_a^b f(x)\ dx$. *(figure 2)*

</td><td>

Figure 2:



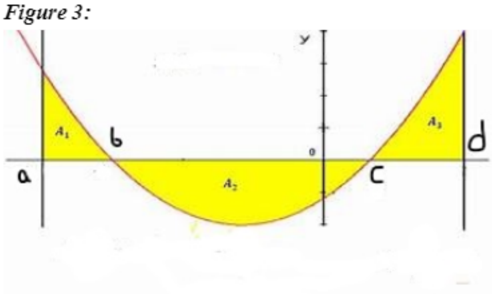
</td></tr>
<tr><td>

Pour une fonction f continue de signe quelconque sur un intervalle [a; b], l'intégrale de f est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f garde un signe constant.

$\int_a^d f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - \int_b^c f(x)\ dx + \int_c^d f(x)\ dx$. *(figure 3)*

</td><td>

Figure 3:



</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Propriétés:</th><th>Représentations graphiques:</th></tr>
<tr><td>

Figure 1:
Le domaine D peut aussi être considéré comme l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x,y) telles que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

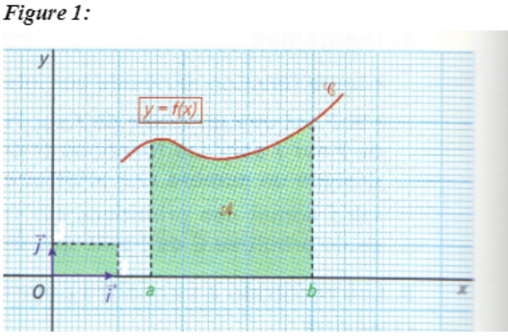
L'aire du domaine D est exprimée en *unité d'aire;* une unité d'aire étant l'aire du rectangle construit à partir des vecteurs unités.

$\vec{i} \longrightarrow 1\ cm$ et $\vec{j} \longrightarrow \frac{1}{2}\ cm$ donc on a:

$1\ u \cdot a = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ cm^2$ ($u \cdot a$ unité d'aire).

</td><td>

Figure 1:



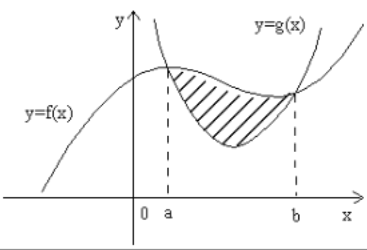
</td></tr>
<tr><td>

Figure 2:
Soit deux fonctions f et g continues sur $[a\ ;\ b]$, avec $f \leqslant g$.
L'aire du domaine compris entre les courbes, représentatives des deux fonctions et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donné par:

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$

</td><td>

Figure 2:



</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Définitions:</th><th>Théorème:</th><th>Exemple:</th></tr>
<tr>
<td>

Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$
Alors la fonction F définie sur $[a\ ;\ b]$ par:

$$F(x)=\int_a^b f(t)\ dt$$

est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $F'(x)=f(x)$
On dit que: F est la primitive de f sur $[a\ ;\ b]$ qui s'annule en a.

Toute fonction continue f sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

</td>
<td>

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Alors pour toute primitive F de f sur $[a\ ;\ b]$ on a:

$$\int_a^b f(t)\ dt=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

</td>
<td>

Montrons que:

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{e^x\left(e^{-x}+1\right)}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

On peut en déduire la valeur de:

$$\int_0^1\frac{1}{e^x+1}\ dx=?$$

On sait que:

$$\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=-\frac{-\left(e^{-x}\right)}{1+e^{-x}}$$

forme $\dfrac{u'}{u}$ *donc une primitive est de la forme* $\ln(u)$

$$\int_0^1\frac{1}{e^x+1}\ dx=\left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1$$

$$=-\ln\left(1+e^{-1}\right)+\ln\left(1+e^{0}\right)$$

$$=\ln(2)-\ln\left(1+e^{-1}\right)=\ln\left(\frac{2}{1+\frac{1}{e}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$$

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Propriétés:</th><th>Définition: Valeur moyenne</th></tr>
<tr>
<td>

0) Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Alors pour tout réel $a\in I$ et $b\in I$:

$$\int_a^a f(x)\ dx=0 \text{ et } \int_a^b f(x)\ dx=-\int_b^a f(x)\ dx$$

1) ***Relation de Chasles:***
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour tous réels a, b et c appartenant à I :

$$\int_a^b f(x)\ dx=\int_a^c f(x)\ dx+\int_c^b f(x)\ dx$$

2) ***Linéarité:***
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I et pour tout réel λ.

$$\int_a^b\left(f(x)+\lambda\ g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)\ dx+\lambda\int_a^b g(x)\ dx$$

3) ***Positivité:***
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$ sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ alors:

$$\int_a^b f(x)\ dx\geqslant 0$$

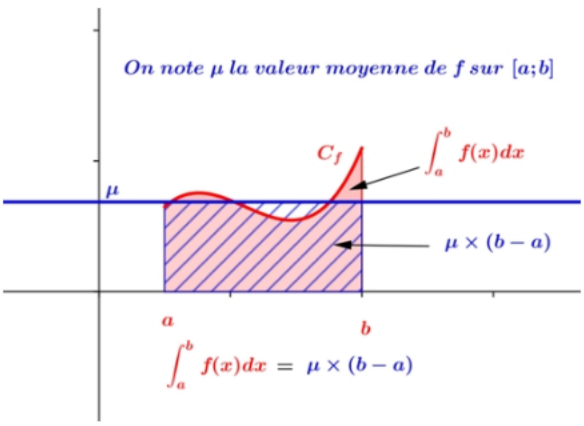
4) ***Conservation de l'ordre:***
Soient f et g deux fonctions contiues sur un intervalle I ; a et b deux réels appartenant à I tels que $a\leqslant b$.
Si pour tout réel $x\in[a\ ;\ b]$, $f(x)\leqslant g(x)$ alors:

$$\int_a^b f(x)\ dx\leqslant\int_a^b g(x)\ dx$$

</td>
<td>

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ de $\mathbb{R}$ tel que $a<b$.
On appelle *valeur moyenne* de f sur $[a\ ;\ b]$ le réel μ:

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$



A retenir:
f est une fonction continue et positive sur [a;b].
L'aire du domaine compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $(b-a)$.

</td>
</tr>
</table>

Exemple 1:	*Exemple 2:*
Calculer les intégrales suivantes: $I_1=\int_{-2}^{3}\left(x^2+5\right)\,dx$ **et** $I_2=\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$ $I_1=\int_{-2}^{3}\left(x^2+5\right)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+5x\right]_{-2}^{3}=F(3)-F(-2)$ $I_1=\frac{1}{3}\times3^3+5\times3-\left(\frac{1}{3}\times(-2)^3+5\times(-2)\right)=24+\frac{8}{3}+10$ $I_1=\frac{110}{3}$ $I_2=\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2+5}\right]_{-1}^{2}$ $I_2=\sqrt{2^2+5}-\sqrt{(-1)^2+5}=\sqrt{9}-\sqrt{6}$ $I_2=3-\sqrt{6}$	**Calculer la valeur moyenne de f sur $[1\,;\,7]$ où f est la fonction définie par:** $f(x)=x(8-x)$ **On appelle** *valeur moyenne* **de f sur $[1\,;\,7]$ le réel μ:** $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{7-1}\int_1^7 f(x)\,dx$ $\mu=\frac{1}{6}\int_a^b x(8-x)\,dx=\frac{1}{6}\int_1^7\left(8x-x^2\right)dx$ $\mu=\frac{1}{6}\left[\int_1^7 8x\,dx-\int_1^7 x^2\,dx\right]$ **(Linéarité)** $\mu=\frac{1}{6}\left[8\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^7-\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^7\right]$ $\mu=\frac{1}{6}\left[8\left(\frac{7^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)-\left(\frac{7^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)\right]$ $\mu=\frac{1}{6}\left[8(24)-\left(\frac{342}{3}\right)\right]=\frac{1}{6}(78)=13$

Intégration par parties:	*Exemples:*
On considère des fonctions u et v dérivables sur un intervalle I telles que u et v soient continues sur I. **Soient a et b deux réels de I telle que $a<b$, alors:** $\int_a^b (u'v)(x)\,dx=[uv]_a^b-\int_a^b (uv')(x)\,dx$ *Le choix de u' et v est important: effectivement il faut pouvoir trouver une primitive de $u'\times v$* *On peut être amené à effectuer une double intégration par parties, lorsque la primitive de $u\times v'$ nécessite elle-même une intégration par parties*	**Calculer les intégrales suivantes :** **1)** $I_1=\int_1^e x\times\ln(x)\,dx$ **On pose :** *On ne connaît pas de primitives de "ln"!!!* $\begin{cases}u'(x)=x\\ v(x)=\ln(x)\end{cases}\quad\begin{cases}u(x)=\frac{x^2}{2}\\ v'(x)=\frac{1}{x}\end{cases}$ $I_1=\int_1^e x\times\ln(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\times\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,dx$ $I_1=\left[\frac{e^2}{2}\times\ln e-0\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$ $I_1=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2-1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$ **2)** $I_2=\int_0^{\pi}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\times\cos(x)\,dx$ **On pose :** $\begin{cases}u'(x)=\cos(x)\\ v(x)=2x+\frac{\pi}{2}\end{cases}\quad\begin{cases}u(x)=\sin(x)\\ v'(x)=2\end{cases}$ $I_2=\int_0^{\pi}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\times\cos(x)\,dx=\left[\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\times\sin(x)\right]_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx$ $I_2=0-2\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi}=-2(1+1)=-4$

Inégalités: Bornes d'intégration	*Exemple:*
Soit un intervalle $I=[a\,;\,b]$ et soient m et M deux réels. **1) Si** $f(x)\leqslant M$ **alors** $\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a)$ **2) Si** $m\leqslant f(x)$ **alors** $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx$ *Inégalité de la moyenne:* **Soit** $m\leqslant M$ **:** $\forall x\in\mathbb{R}\,,\ m\leqslant f(x)\leqslant M\Rightarrow m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a)$	**Démontrons que :** $\frac{1}{e}\leqslant\int_0^1 e^{-t^2}\,dt\leqslant1$ **On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par:** $f(t)=e^{-t^2}$ $0\leqslant t\leqslant1\iff0\leqslant t^2\leqslant1\iff-1\leqslant-t^2\leqslant0$ **La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$** **Donc** $e^{-1}\leqslant e^{-t^2}\leqslant e^0$ **soit** $\frac{1}{e}\leqslant f(t)\leqslant1$ $\int_0^1\frac{1}{e}\,dt\leqslant\int_0^1 f(t)\,dt\leqslant\int_0^1 1\,dt$ $\iff\frac{1}{e}\int_0^1 1\,dt\leqslant\int_0^1 f(t)\,dt\leqslant\int_0^1 1\,dt$ $\iff\frac{1}{e}\leqslant\int_0^1 f(t)\,dt\leqslant1$