Fiche 7: Equations différentielles et Primitives

Partie A: Equations différentielles

Définition et propriété:	*Exemples:*
On considère l'équation différentielle $y' + a\,y = 0$ (appelée équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficient constant) où a est un réel et y une fonction dérivable de la variable x définie sur $\mathbb{R}$. **Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par : $f(x) = k\,e^{-a\,x}$, $k \in \mathrm{R}$** **Soient x_0 , y_0 et $a \neq 0$ des réels donnés, l'équation différentielle $y' + a\,y = 0$ admet une unique solution f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\mathrm{f}\left(x_0\right) = y_0$.**	**1) Résoudre l'équation différentielle: $y' - 3\,y = 0$** **Les solutions sont de la forme: $\mathrm{f}(x) = k\,e^{3x}$, $k \in \mathrm{R}$** **2) Résoudre l'équation différentielle: $y' = \frac{-5}{2}\,y$, soit $y' + \frac{5}{2}\,y = 0$** **Les solutions sont de la forme: $\mathrm{f}(x) = k\,e^{-\frac{5}{2}x}$, $k \in \mathrm{R}$** **3) Résoudre l'équation différentielle: $4\,y' + 5\,y = 0$ soit $y' + \frac{5}{4}\,y = 0$** **Les solutions sont de la forme: $\mathrm{f}(x) = k\,e^{-\frac{5}{4}x}$, $k \in \mathrm{R}$** **Déterminons la solution f de cette équation telle que $\mathrm{f}(1) = 2$** $\mathrm{f}(1) = k\,e^{-\frac{5}{4}} = 2 \Leftrightarrow k = \dfrac{2}{e^{\frac{-5}{4}}} = 2\,e^{\frac{5}{4}}$ **La solution cherchée est: $\mathrm{f}(x) = 2\,e^{\frac{5}{4}} \times e^{\frac{-5}{4}x}$** **soit $\mathrm{f}(x) = 2\,e^{\frac{-5}{4}(x-1)}$**

Définition et propriété:	*Exemples:*
On considère l'équation différentielle $y' + a\,y = b$ (appelée équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant) où a est un réel non nul et y une fonction dérivable de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ **Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par : $f(x) = k\,e^{-a\,x} + \frac{b}{a}$, $k \in \mathrm{R}$** **Soient x_0 , y_0 , $a \neq 0$ et b des réels donnés, l'équation différentielle $y' + a\,y = b$ admet une unique solution f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\mathrm{f}\left(x_0\right) = y_0$.**	**1) Résoudre l'équation différentielle: $y' + 2\,y = 4$** **Les solutions sont de la forme: $\mathrm{f}(x) = k\,e^{-2x} + \frac{4}{2}$** **soit $\mathrm{f}(x) = k\,e^{-2x} + 2, k \in \mathrm{R}$** **2) Résoudre l'équation différentielle: $y' = \frac{1}{2}\,y + 2$ dont la solution vérifie $\mathrm{f}(0) = 1$** $y' = \frac{1}{2}\,y + 2$ **soit** $y' - \frac{1}{2}\,y = 2$ **Les solutions sont de la forme: $\mathrm{f}(x) = k\,e^{\frac{1}{2}x} + \dfrac{2}{\frac{-1}{2}} = k\,e^{\frac{1}{2}x} - 4$** **Déterminons la solution de cette équation telle que $\mathrm{f}(0) = 1$** $\mathrm{f}(0) = k\,e^{\frac{1}{2}\times 0} - 4 = k - 4 = 1$ **donc** $k = 5$ **La solution cherchée est: $\mathrm{f}(x) = 5\,e^{\frac{1}{2}x} - 4$**

Définition:	*Exemples:*
On considère l'équation différentielle $y' + a\,y = \mathrm{f}(x)$ avec f une fonction continue sur I **$1^{ère}$ étape: on cherche une sloution particulière y_0** **2^{nde} étape: on détermine l'ensemble des solutions en se ramenant à l'équation homogène: $y' + a\,y = 0$** ***Dans la pratique, l'énoncé donnera la solution particulière y_0 ou la méthode pour la déterminer!!***	**Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2\,y = 1 - 6\,x$** **$1^{ère}$ étape: Montrons que l'équation (E) admet une solution affine comme solution, de la forme $y_0(x) = a\,x + b$** $y_0' - 2\,y_0 = a - 2\,a\,x - 2\,b = -2\,a\,x + (a - 2\,b) = 1 - 6\,x$ **Par identification on trouve: $2\,a = 6$ soit $a = 3$ et $a - 2\,b = 1$ d'où $b = 1$** **La solution particulière est: $y_0(x) = 3\,x + 1$** **2^{nde} étape: Cherchons la solution de l'équation homogène $y' - 2\,y = 0$** $f(x) = k\,e^{2x}$, $k \in \mathrm{R}$ **En déduire alors l'ensemble des solutions de l'équation (E)** **Soit g une solution de (E) donc $g' - 2\,g = 1 - 6\,x$** **g est solution de (E) et y_0 est solution de (E) , on a le système suivant:** $\begin{cases} g' - 2\,g = 1 - 6\,x \\ y_0' - 2\,y_0 = 1 - 6\,x \end{cases}$ **donc par soustraction, on a:** $g' - y_0' - 2\left(g - y_0\right) = 0$ **soit** $\left(g - y_0\right)' - 2\left(g - y_0\right) = 0$ **Donc $\left(g - y_0\right)(x) = k\,e^{2x}$, $k \in \mathrm{R}$** **Finalement, on a:** $g(x) - y_0(x) = k\,e^{2x}$ **donc** $g(x) = k\,e^{2x} + (3\,x + 1)$, $k \in \mathrm{R}$

Partie B: Primitives

Définition et Théorème:	*Propriétés:*
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. **On appelle primitive de f sur I, une fonction F, dérivable sur I, telle que, pour tout $x \in I$: $F'(x) = f(x)$.** *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .* **Soit f une fonction continue sur un intervalle I:** **Si deux fonctions F et G sont des primitives de f sur I, alors il existe un nombre réel k tel que, pour tout x de I, $G(x) = F(x) + k$** *Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle différent d'une constante.*	**Soit F une primitive de f sur un intervalle I et G une primitive de g sur un intervalle I:** **1) La fonction $f+g$ admet comme primitive sur I la fonction $F+G$** **2) La fonction λf (avec $\lambda \in R$) admet comme primitive sur I la fonction λF .** **Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.** **Un réel x_0 de I et un réel y_0 étant donnés (appelés « *conditions initiales* »), il existe une unique primitive F de f sur I telle que: $F(x_0) = y_0$.**

Fonction f :	Fonction primitive F (C constante) :	Intervalle I:
k	$kx + C$	R
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	R
$ax+b$	$\frac{1}{2}ax^2 + bx + C$	R
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1) \times x^{n-1}} + C$	$]-\infty\ ;0[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$
x^n , $n \in Z \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	R
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$]0\ ;+\infty[$
$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + C$	$]-\infty\ ;0[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$
$\cos x$	$\sin x + C$	R
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi , k \in Z\right\}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	R
e^x	$e^x + C$	R
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$]0\ ;+\infty[$

Fonctions:	Primitives (C est un réel):	Conditions:
$u' + v'$	$u + v + C$	
$k u'$ (k constante)	$k u + C$	
$u' \times u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in Z$, $n \neq -1$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u > 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C$	$u \neq 0$ sur I
$u' \times e^u$	$e^u + C$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$	$u > 0$ sur I
$u' \times \cos u$	$\sin u + C$	
$u' \times \sin u$	$-\cos u + C$	

Exemple 1:	*Exemple 2:*
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminons les primitives: **1) On considère la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par:** $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ **Trouvons une primitive sur $]0\ ;+\infty[$:** $f(x) = \ln(x) \times \frac{1}{x}$ **(forme $u \times u'$ donc primitive $\frac{u^2}{2}$)** $F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + k$, $k \in R$. **2) On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par:** $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ **La primitivie cherchée est:** $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln(x) + k$, $k \in R$ **3) On considère la fonction f définie sur R par:** $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+5}}$ **(forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ donc une primitive $2\sqrt{u}$)** **La primitive cherchée est:** $F(x) = 2\sqrt{x^2+x+5} + k$, $k \in R$	**1) On considère la fonction f définie sur R par:** $f(x) = (3x^2+5) \times (x^3+5x+1)^2$ **(forme $u^n \times u'$ donc primitive $\frac{u^{n+1}}{n+1}$)** $F(x) = \frac{1}{2+1} \times (x^3+5x+1)^{2+1} + k$, $k \in R$ $F(x) = \frac{1}{3} \times (x^3+5x+1)^3 + k$, $k \in R$ **Déterminons la primitive qui s'annule en 1:** $F(1) = \frac{1}{3} \times (1^3+5\times 1+1)^3 + k = 0$ $\frac{343}{3} + k = 0$ d'où $k = -\frac{343}{3}$ **La primitive cherchée est:** $F(x) = \frac{1}{3} \times (x^3+5x+1)^3 - \frac{343}{3}$ **2) Soit $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$, vérifions que $F(x) = x^3 + \ln x$ est une primitive de f sur $]0\ ;+\infty[$** **Fest dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et $F'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} = f(x)$** **F est une primitive de f** **L'ensemble des primitives de f sur $]0\ ;+\infty[$ sont les fonctions de la forme: $G(x) = x^3 + \ln(x) + k$, $k \in R$** **Cherchons la primitive que s'annule en e, c'est à dire $G(e) = 0$** $G(e) = e^3 + \ln(e) + k = e^3 + 1 + k = 0$ **d'où** $k = -1 - e^3$ **La primitive cherchée est donc:** $G(x) = x^3 + \ln(x) - 1 - e^3$