Fiche 6: Logarithme népérien

Rappels: Fonctions Exponentielles

Théorème:

La fonction exponentielle est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et:

1) Dérivée: $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$;
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$.

x	$-\infty$		$+\infty$
e^{x}	0	$\nearrow$	$+\infty$

Propriétés algébriques:

Pour tous nombres réels a et b:

1) $e^{a+b} = e^{a} \times e^{b}$;
2) $e^{-a} = \dfrac{1}{e^{a}}$;
3) $e^{a-b} = e^{a} \times e^{-b} = \dfrac{e^{a}}{e^{b}}$;
4) Pour tout entier naturel n, $\left(e^{a}\right)^{n} = e^{na}$
5) $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

Propriétés et limites usuelles:

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.
Si u est dérivable sur I, alors la fonction

$x \longrightarrow e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée

est: $x \longrightarrow u'(x) \times e^{u(x)}$

Limites usuelles:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x}-1}{x} = 1$
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} x \times e^{x} = 0$

Fonctions logarithme népérien:

Définition:

Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^{x} = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ appelée logarithme népérien de a, notée $x = \ln(a)$
On définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction logarithme népérien:

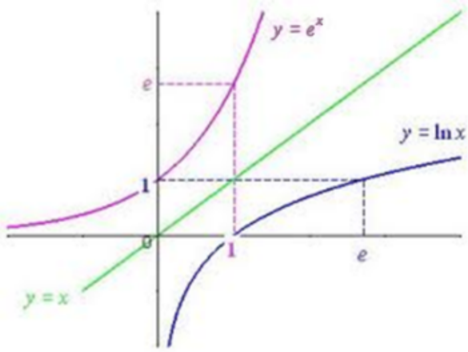
$$\ln :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \ln(x)$$

Propriétés:

1) Le nombre réel $\ln(e) = 1$ et de plus on a: $\ln 1 = 0$
2) Si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$: $e^{b} = a \iff b = \ln(a)$
3) Si $a > 0$: $e^{\ln(a)} = a$
4) Si $b \in \mathbb{R}$: $\ln\left(e^{b}\right) = b$

Représentation graphique:

La fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.



Propriétés:

1) La représentation graphique de la fonction "ln" est symétrique à celle de la fonction "exponentielle" par rapport à la droite d'équation $y = x$
2) La fonction "ln" est concave sur $]0\,;+\infty[$
3) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction "ln"

La fonction logarithme népérien est continue, strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et:

1) Dérivée: $\left(\ln(x)\right)' = \dfrac{1}{x}$
2) $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \ln(x) = -\infty$;
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.
Si u est strictement positive et dérivable sur I, alors la fonction $x \longrightarrow \ln\left(u(x)\right)$ est dérivable sur I et sa dérivée est:
$x \longrightarrow \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
Les fonctions u et $\ln(u)$ ont le même sens de variation.

Propriétés:

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b:

1) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
2) $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
3) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
4) Pour tout entier naturel n, $ln(a)^{n} = n \times \ln(a)$
5) $\ln e^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \times \ln(e) = \dfrac{1}{2}$

Conséquences:

1) La fonction logarithme népérien est *strictement négative* sur $]0\,;1[$ et *strictement positive* sur $]1\,;+\infty[$
2) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y:
$$\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$$
3) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y:
$$\ln(x) > \ln(y) \iff x > y$$

Limites usuelles:

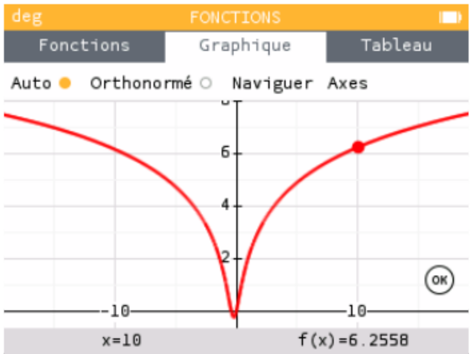
1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Croissances comparées:

2) $\lim\limits_{x \to 0^{+}} x^{n} \ln(x) = 0$, $n \in \mathbb{N}^{*}$
3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^{n}} = 0$, $n \in \mathbb{N}^{*}$

Cas particuliers:

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
5) $\lim\limits_{x \to 0^{+}} x \ln(x) = 0$

<table>
<tr><th>Exemple 1:</th><th>Exemple 2:</th><th>Exmple 3:</th></tr>
<tr>
<td>
1) $\ln(45) = \ln(9\times 5) = \ln\left(3^2\times 5\right)$
$\ln(45) = \ln\left(3^2\right) + \ln(5)$
$\ln(45) = 2\ln(3) + \ln(5)$
2) $\ln\left(\frac{9}{25}\right) = \ln(9) - \ln(25)$
$\ln\left(\frac{9}{25}\right) = \ln\left(3^2\right) - \ln\left(5^2\right)$
$\ln\left(\frac{9}{25}\right) = 2\ln(3) - 2\ln(5)$
</td>
<td>
$\ln\left[(x-3)(2-x)\right] \leqslant \ln\left[(x-3)(1-x)\right]$
Domaine de définition:
$(x-3)(2-x)>0$ et $(x-3)(1-x)>0$
$x\in\,]2\,;3[$ et $x\in\,]1\,;3[$
Cela signifie que: $x\in\,]2\,;3[$
(car $]1\,;3[\,\cap\,]2\,;3[\,=\,]2\,;3[$)
$\ln\left[(x-3)(2-x)\right] \leqslant \ln\left[(x-3)(1-x)\right]$
équivaut à:
$\left[(x-3)(2-x)\right] \leqslant \left[(x-3)(1-x)\right]$
$\Leftrightarrow (x-3)\left[(2-x)-(1-x)\right]\leqslant 0$
$\Leftrightarrow (x-3)(1)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 3$
Donc la solution de l'inéquation est:
$S=\,]-\infty\,;3]\,\cap\,]2\,;3[$
D'où $S=\,]2\,;3[$
</td>
<td>
On considère la fonction f définie sur R par:
$f(x) = \ln\left(5x^2+2x+1\right)$
On sait que: $5x^2+2x+1>0$ car $\Delta<0$
Donc f est définie sur R
f est dérivable sur R et $f'(x) = \frac{10x+2}{5x^2+2x+1}$
Le signe de la dérivée dépend du signe de:
$10x+2$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{1}{5}$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$ ↘</td><td>$f\left(\frac{-1}{5}\right)$</td><td>↗ $+\infty$</td></tr>
</table>
$f\left(-\frac{1}{5}\right)\approx -0{,}223\leqslant 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car
$\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2+2x+1 = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ car
$\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2+2x+1 = +\infty$
Représentation graphique:


</td>
</tr>
</table>