Fiche 5: Dérivation et convexité

Dérivées d'une composée de fonction:

<table>
<tr><th>Définition et propriété:</th><th>Exemples:</th></tr>
<tr><td>
Définition:
Soient u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction définie sur l'intervalle J
La composée de u par v, notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par:
$(v \circ u)(x) = v\left(u(x)\right)$
Schéma de composition:
I J
$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v\left(u(x)\right)$

Propriété:
Soient u une fonction définie et dérivable sur I à valeurs dans J, et v une fonction définie et dérivable sur J.
Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$
C'est à dire pour tout réel x vérifiant les conditions de définition requises:
$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x) = u'(x) \times v'\left(u(x)\right)$
</td><td>
1) S
i $u(x) = 2x+3$ et $v(x) = x^2$
Schéma de composition:
R R
$x \xrightarrow{u} 2x+3 \xrightarrow{v} (2x+3)^2$

Alors $(v \circ u)(x) = v\left(u(x)\right)$
$(v \circ u)(x) = v(2x+3) = (2x+3)^2$
Schéma de composition:
R R
$x \xrightarrow{v} x^2 \xrightarrow{u} 2x^2+3$

Alors $(u \circ v)(x) = u\left(v(x)\right)$
$(u \circ v)(x) = v\left(x^2\right) = 2x^2+3$
ATTENTION:
$(v \circ u)(x) \neq (u \circ v)(x)$
La composée de fonctions n'est PAS commutative!
2) Soient deux fonctions $u(x) = 3x-1$ et $v(x) = \sqrt{x}$,
avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
On obtient:
$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$
$(v \circ u)'(x) = 3 \times v'\left(u(x)\right) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-1}}$
$(v \circ u)'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Variations d'une fonction composée:</th><th>Exemples:</th></tr>
<tr><td>
u est définie sur l'intervalle I à valeurs dans l'intervalle J et v est définie sur J.

Si v et u sont de même monotonie alors la composée $v \circ u$ est croissante sur I.

Si v et u sont de monotonie contraire alors la composée $v \circ u$ est décroissante sur I.

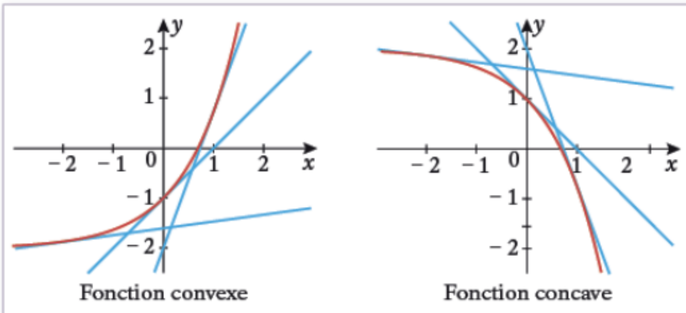
Tableau récapitulatif:
<table>
<tr><th>v</th><th>u</th><th>$v \circ u$</th></tr>
<tr><td>↗</td><td>↗</td><td>↗</td></tr>
<tr><td>↘</td><td>↘</td><td>↗</td></tr>
<tr><td>↗</td><td>↘</td><td>↘</td></tr>
<tr><td>↘</td><td>↗</td><td>↘</td></tr>
</table>
</td><td>
1) On considère u et v telles que:
$u(x) = 2x-4$ et $v(x) = \frac{1}{x}$
u est croissante et v est décroissante.
Donc $v \circ u$ définie par $v\left(u(x)\right) = v(2x-4) = \frac{1}{2x-4}$ est décroissante.
2) On considère u et v telles que:
$u(x) = x^2+2$ et $v(x) = \sqrt{x}$
u est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et v est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Donc $v \circ u$ définie par $v\left(u(x)\right) = v\left(x^2+2\right) = \sqrt{x^2+2}$ est également croissante sur $\mathbb{R}^+$.
</td></tr>
</table>

Dérivées et opérations sur les fonctions:

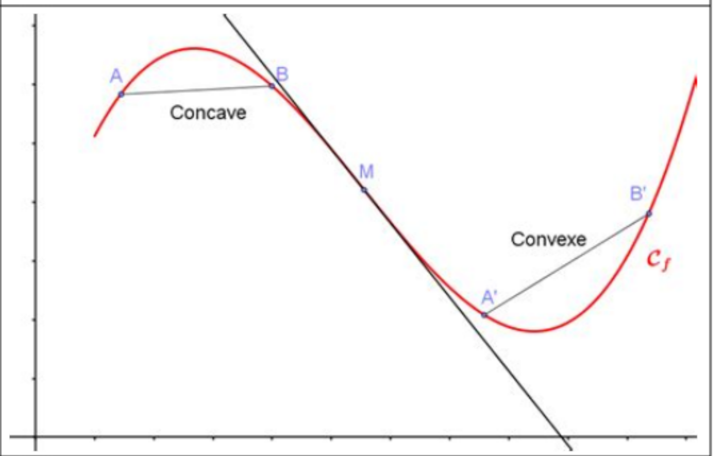
u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I:

Fonctions :	Dérivées	Conditions:
$k\,u\,(x)$, $k \in \mathbf{R}$	$k\,u'\,(x)$	
$u\,(x)+v\,(x)$	$u'\,(x)+v'\,(x)$	
$u\,(x)\times v\,(x)$	$u'\,(x)\times v\,(x)+u\,(x)\times v'\,(x)$	
$k\times u\,(x)$ (k constante)	$k\times u'\,(x)$	
$u^2\,(x)$	$2\,u'\,(x)\times u\,(x)$	
$u^n\,(x)$ $(n \in \mathbf{Z})$	$n\,u'\,(x)\times u^{n-1}\,(x)$	
$\dfrac{u\,(x)}{v\,(x)}$	$\dfrac{u'\,(x)\times v\,(x)-u\,(x)\times v'\,(x)}{v^2\,(x)}$	$v\,(x)\neq 0$
$\sqrt{u\,(x)}$	$\dfrac{u'\,(x)}{2\times\sqrt{u\,(x)}}$	$u\,(x)>0$
$\dfrac{1}{u\,(x)}$	$\dfrac{-u'\,(x)}{u^2\,(x)}$	$u\,(x)\neq 0$
$\cos\left(u\,(x)\right)$	$-u'\,(x)\times\sin\left(u\,(x)\right)$	
$\sin\left(u\,(x)\right)$	$u'\,(x)\times\cos\left(u\,(x)\right)$	

Convexité d'une fonction:

Définitions:	*Représentations graphiques:*
1) Une fonction dérivable sur un intervalle I est dite *convexe* sur cet intervalle I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes sur cet intervalle I. 2) Une fonction dérivable sur un intervalle I est dite *concave* sur cet intervalle I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes sur cet intervalle I.	

Théorème:	*Conséquences:*
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. - f est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est croissante sur I, c'est à dire $f''\,(x)\geqslant 0$ pour tour $x\in \mathrm{I}$. - f est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I, c'est à dire $f''\,(x)\leqslant 0$ pour tour $x\in \mathrm{I}$.	On note f'' la dérivée seconde de la fonction f, c'est à dire la dérivée de la dérivée f'. - Si la dérivée seconde est positive alors la fonction f est convexe. - Si la dérivée seconde est négative alors la fonction f est concave.

Définition: point d'inflexion	*Représentation graphique:*
Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point $\mathrm{M}\left(x_{\mathrm{M}}\,;f\left(x_{\mathrm{M}}\right)\right)$ point d'inflexion : cela signifie que la fonction change de convexité. - Si la dérivée f' change de sens de variation en x_{M} alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse x_{M} . - Si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en x_{M} alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse x_{M}	

Exemple:	*Représentation graphique:*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4 - 40x + 120$

Sa dérivée est la fonction *f'* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 40$

Sa dérivée seconde est la fonction *f''* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$

On constate que $20x^2 \geqslant 0$ donc le signe de la dérivée seconde dépend du signe de $(x-3)$

Tableau de variation:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
signe $f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
variations $f'(x)$	↘	-40	↘	-175	↗
convexité de f	*concave*		*concave*		*convexe*

La fonction f est concave sur $]-\infty\ ;\ 3]$ et convexe sur $[3\ ;\ +\infty[$.

Le point A $(3\ ;\ -175)$ est l'unique point d'inflexion car $f''(3) = 0$ en changeant de signe.