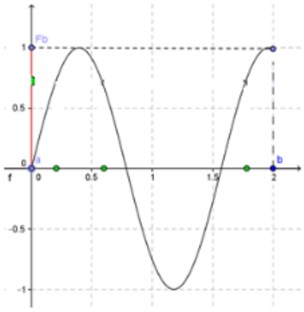
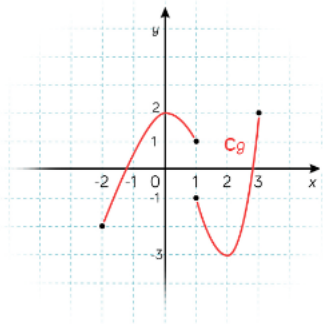
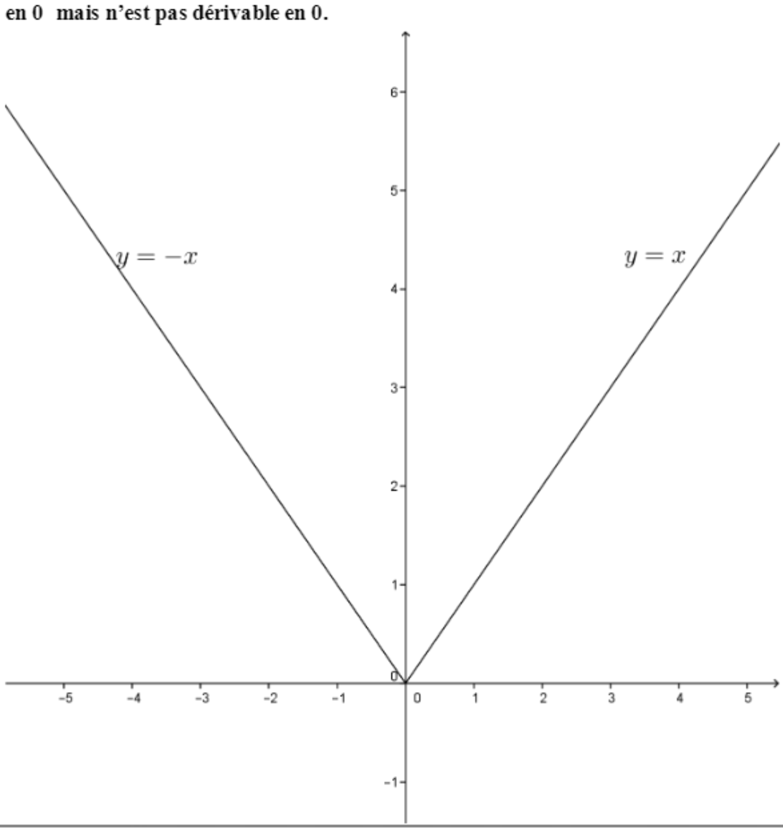
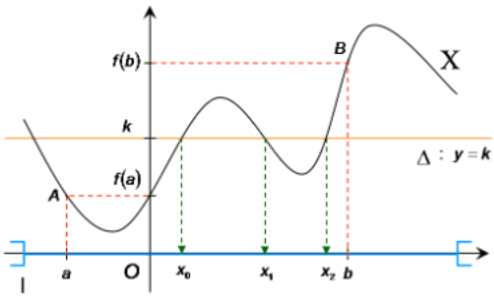
Fiche 4: Continuité

Définition:	*Exemple 1:*	*Exemple 2:*
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de R. **Dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau** **(la courbe ne présente aucun saut, aucun trou: autrement dit: lorsqu'on construit la courbe, on ne lève pas le crayon).** **Toutes les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition :** **1) polynomiales :sur R** **2) rationnelles : sur R privée de la (les) valeur(s) qui annule(nt) le dénominateur.** **3) racines carrées : sur $[0\ ;+\infty[$** **4) exponentielles : sur R** **5) logarithmes : sur $]0\ ;+\infty[$** **6) valeur absolue: sur R** **7) sinus et cosinus: sur R**	 **La fonction f est continue sur $[0\ ;\ 2]$**	 **La fonction g n'est pas continue sur $[-2\ ;\ 3]$** **g est discontinue en 1 (il y a un saut) donc non continue.**

Théorème: Continuité et Dérivabilité	*Exemple:*
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I. **1) Si f est continue en a alors f admet une limite en a et cette limite est $f(a)$.** **2) Si f est continue sur un intervalle I alors f est continue en a pour tout $a \in I$.** **Méthode:** **On doit calculer et comparer:** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ **Si** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ **alors f est continue en a** **3) Si une fonction f est dérivable en un point a alors f est continue en a.** **4) Si une fonction dérivable sur un intervalle I alors f est continue sur cet intervalle.**	*La réciproque du théorème est fausse :* **Une fonction peut être continue en un réel a sans être dérivable en ce réel.** **Par exemple la fonction valeur absolue f définie sur R par $f(x) = \|x\|$ est contine en 0 mais n'est pas dérivable en 0.** 

<table>
<tr><th>Continuité et équation: Valeurs intermédiaires</th><th>Graphique:</th></tr>
<tr><td>Soit f une application continue sur l'intervalle I.
Soit k, un réel compris entre f (a)et f (b).
Alors il existe au moins un réel c dans [a,b] tel que:
$f(c) = k$</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Corollaire: Bijection</th><th>Exemple:</th></tr>
<tr><td>Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a ; b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

A retenir :
Lorsque f est une fonction définie sur un intervalle I, et lorsque $\lambda \in f(I)$, l'hypothèse de continuité de f fournit l'existence d'au moins une solution (dans I) de l'équation $f(x) = \lambda$.
Si l'on ajoute l'hypothèse de stricte monotonie de f , l'unicité de cette solution est assurée.</td><td>On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par:
$f(x) = x^3 + x + 1$
Prouvons que $f(x) = 4$ possède une unique solution
La fonction f est dérivable sur $[0 ; 10]$ et $f'(x) = 3x^2 + 1$
On constate que $f'(x) \geqslant 0$
<table>
<tr><td>x</td><td>0 α 10</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+   +</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>1 ↗ 4 ↗ 1011</td></tr>
</table>
$f(0) = 1$ et $f(10) = 1011$, on a $4 \in [f(0) ; f(10)] = [1 ; 1011]$
Par conséquent, d'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = 4$ possède une unique solution.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Application aux suites:</th><th>Théorème du point fixe:</th><th>Exemple:</th></tr>
<tr><td>Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'élèments de I convergeant vers $l \in I$ alors on a:
$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$</td><td>Soit une suite (u_n) définie par un premier terme et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers l
Si la fonction associée f est continue en l , alors la limite de la suite, l , est solution de l'équation $f(x) = x$.</td><td>Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$
On a pour tout $x \in]0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$
d'où $f'(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}$
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $\sqrt{2}$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>−   0   +</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↘ $\sqrt{2}$ ↗</td></tr>
</table>
Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) \geqslant \sqrt{2}$ soit $f(x) > 0$
Les images par f appartiennent à I .
On admet que tous les termes de la suites sont positifs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \geqslant \sqrt{2}$ et qu'elle est décroissante.
La suite est décroissante et minorée donc elle converge, soit l sa limite.
$f(l) = l \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{2}{l}\right)$
$\Leftrightarrow 2l = l + \frac{2}{l} \Leftrightarrow l = \frac{2}{l} \Leftrightarrow l^2 = 2$
$\Leftrightarrow l = \sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$
$l = -\sqrt{2} \notin]0 ; +\infty[$ et $l = \sqrt{2} \in]0 ; +\infty[$
D'après le théorème du point fixe,
$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$</td></tr>
</table>