Fiche 3: fonctions Cosinus et Sinus

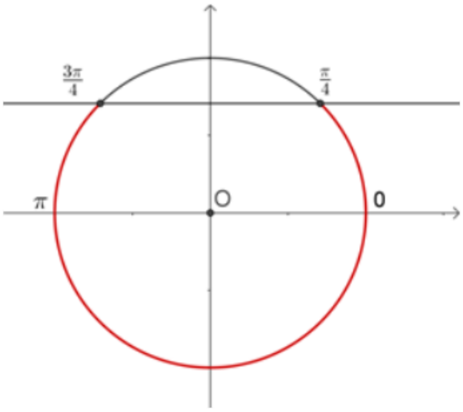
Résolution d'équations et d'inéquations:

Valeurs remarquables:

Expression	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valeur en degrés	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Équivalent cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Équivalent sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Equations:	*Inéquations:*
Soit a un réel fixé **1) Les solutions de l'équation** **$\cos(x) = \cos(a)$ sont les réels de la forme:** $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$ **où $k \in \mathbb{Z}$** **2) Les solutions de l'équation** **$\sin(x) = \sin(a)$ sont les réels de la forme:** $\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$ **où $k \in \mathbb{Z}$**	**Soit a un nombre réel.** **1) Les solutions de l'inéquation $\cos(x) \leqslant \cos(a)$** **sont les nombres vérifiant:** $a + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi - a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **2) Les solutions de l'inéquation $\sin(x) \leqslant \sin(a)$** **sont les nombres vérifiant:** $-\pi - a + 2k\pi \leqslant x \leqslant a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Exemple 1:	*Exemple 2:*
Résoudre l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$ **Dans $\mathbb{R}$ cette équation a une infinité de solutions:** $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$	**Résoudre l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $]0\,;\,2\pi]$** *Lorsqu'on cherche les solutions dans un intervalle donné, il suffit de trouver les valeurs de l'entier relatif k, donnant la condition d'appartenance des solutions à l'intervalle* - $x_1 \in]0\,;\,2\pi] \Leftrightarrow 0 < x_1 \leqslant 2\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 2\pi$ $\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{6} + 2k \leqslant 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < 2k \leqslant 2 - \frac{1}{6}$ **D'où** $\frac{-1}{6} < 2k \leqslant \frac{11}{6} \Leftrightarrow \frac{-1}{12} < k \leqslant \frac{11}{12}$ **donc** $\boxed{k=0}$ - $x_2 \in]0\,;\,2\pi] \Leftrightarrow 0 < x_2 \leqslant 2\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 2\pi$ $\Leftrightarrow 0 < \frac{-1}{6} + 2k \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{1}{6} < 2k \leqslant 2 + \frac{1}{6}$ **D'où** $\frac{1}{6} < 2k \leqslant \frac{13}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{12} < k \leqslant \frac{13}{12}$ **donc** $\boxed{k=1}$ **2 cas:** - $\boxed{k=0}$ **; la solution est:** $x_1 = \frac{\pi}{6}$ - $\boxed{k=1}$ **; la solution est:** $x_2 = \frac{-\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$ **Dans l'intervalle $]0\,;\,2\pi]$, l'ensemble des solutions est:** $S = \left\{ \frac{\pi}{6}\,;\,\frac{11\pi}{6} \right\}$

Exemple 1:	*Exemple 2:*
Résoudre, dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$ l'inéquation: $\sqrt{2}\times\sin(x)-1<0$ soit $\sin(x)<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **Graphiquement:**  $x\in\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right[$ ou $x\in\left]\dfrac{3\pi}{4}\ ;\ 2\pi\right[$ Donc $S=\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right[\cup\left]\dfrac{3\pi}{4}\ ;\ 2\pi\right[$.	**Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$ l'inéquation:** $2\sin(x)+1\leqslant 0 \Leftrightarrow \sin(x)\leqslant\dfrac{-1}{2}$ Donc $\sin(x)\leqslant\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$ $-\pi+\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{-\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow \dfrac{-5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{-\pi}{6}+2k\pi$ **Déterminons les valeurs de k pour lesquelles les solutions appartiennent à $[0\ ;\ 2\pi[$:** $0\leqslant\dfrac{-5\pi}{6}+2k\pi<2\pi \Leftrightarrow \dfrac{5\pi}{6}\leqslant 2k\pi<\dfrac{5\pi}{6}+2\pi$ $\dfrac{5}{6}\leqslant 2k<\dfrac{17}{6} \Leftrightarrow \dfrac{5}{12}\leqslant k<\dfrac{17}{12}$ donc $k=1$ $0\leqslant\dfrac{-\pi}{6}+2k\pi<2\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi<\dfrac{\pi}{6}+2\pi$ $\dfrac{1}{6}\leqslant 2k<\dfrac{13}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{12}\leqslant k<\dfrac{13}{12}$ donc $k=1$ $\dfrac{-5\pi}{6}+2\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{-\pi}{6}+2\pi \Leftrightarrow \dfrac{7\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{11\pi}{6}$ **Les solutions de l'inéquation sur $[0\ ;\ 2\pi[$ sont :** $S=\left[\dfrac{7\pi}{6}\ ;\ \dfrac{11\pi}{6}\right]$

Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus

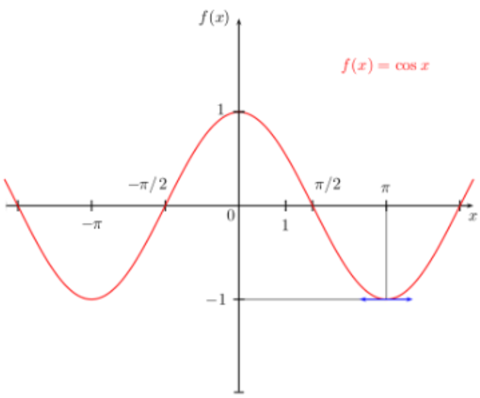
Fonctions Sinus et Cosinus:	*Fonction périodiques:*
Les fonctions "cosinus" et "sinus" sont continues sur R . **La fonction *cosinus* est paire:** $f(-x)=f(x)$ **et la fonction *sinus* est impaire:** $f(-x)=-f(x)$	**Une fonction est dite périodique de période T si pour tout réel x, on a:** $f(x+T)=f(x)$ **Les fonctions "sinus" et "cosinus" sont définies sur R et périodiques de période** $T=2\pi$ **,d'où:** $\cos(x+2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2\pi)=\sin x$ *Remarque*: *Pour étudier une fonction périodique, on se limite à une période*

Fonction Cosinus :	*Fonction Sinus:*
La fonction *cos* est dérivable sur R et pour tous réels x: $f(x)=\cos x$ et $f'(x)=-\sin x$	**La fonction *sin* est dérivable sur R et pour tous réels x:** $f(x)=\sin x$ et $f'(x)=\cos x$

Fonction Cosinus :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

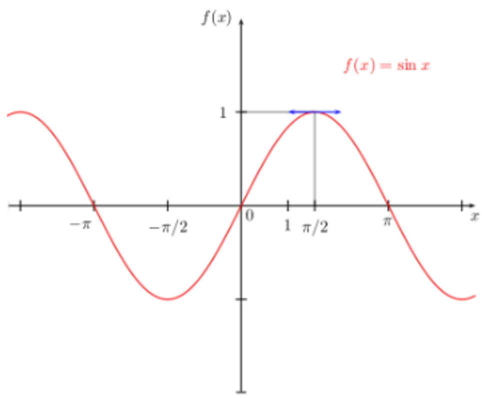


$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$

Fonction Sinus:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

La courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.



$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Propriétés:	*Exemple:*	*Suite exemple:*

Propriétés:

On considère deux réels a et b:

1) $x \mapsto \cos(ax+b)$ **est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tous réels x,**
$f'(x) = -a\sin(ax+b)$

2) $x \mapsto \sin(ax+b)$ **est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tous réels x,**
$f'(x) = a\cos(ax+b)$

Exemple:

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:
$f(x) = \cos(2x) - 1$
Montrons que la fonction est périodique de période $T = \pi$
$f(x+\pi) = \left(2(x+\pi)\right) - 1 = \cos(2x+2\pi) - 1$
$f(x+\pi) = \left(\cos(2x)\right) - 1$
donc $f(x+\pi) = f(x)$ **, f est périodique de période $T = \pi$**
Etudions son sens de variation sur l'intervalle $[0\,;\pi]$:
La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et
$f'(x) = -2\sin(2x)$
Or sur $[0\,;\pi]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0$
$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(0)$
d'où $\begin{cases} 2x = 0 + 2k\pi \\ 2x = \pi - 0 + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$,
les solutions dans $[0\,;\pi]$ sont: $0\,;\ \dfrac{\pi}{2}$ **et** π
Sa courbe présente des tangentes horizontales aux points d'abscisses $0\,;\ \dfrac{\pi}{2}$ **et** π
- **Si** $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ **alors** $2x \in [0\,;\pi]$ **donc** $\sin(2x) > 0$ **d'où** $f'(x) < 0$
- **Si** $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ **alors** $2x \in [\pi\,;2\pi]$ **donc** $\sin(2x) < 0$ **d'où** $f'(x) > 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↘	-2	↗	0

Suite exemple:

Comme la fonction est périodique de période $T = \pi$ on peut obtenir le tableau de variation sur $[0\,;2\pi]$

Tableau de variations:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗	0

Représentation graphique: