Fiche 2: Limites de fonctions

Limite finie à l'infini:	*Limite infinie à l'infini:*
On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $I =]a\ ;+\infty[$. On dit que *f a pour limite l en* $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand On écrit: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$	On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $I =]a\ ;+\infty[$. On dit que *f a pour limite* $+\infty$ *en* $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A\ ;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. On écrit: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
Limite infinie en un réel a:	*Limite infinie en un réel a:*
Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a (mais pas nécessairement en a). On dit que f a comme limite $+\infty$ lorsque x tend vers a si pour tout nombre A, l'intervalle $]A\ ;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On écrit: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$	Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a (mais pas nécessairement en a). On dit que f a comme limite $-\infty$ lorsque x tend vers a si pour tout nombre B, l'intervalle $]-\infty\ ; B[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On écrit: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Opérations sur les limites:

Proporiétés:
1) La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ *ou en* $-\infty$ *est égale à la limite de son terme de plus haut degré.*
2) La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ *ou* $-\infty$ *est égale à la limite du quotient des termes des plus haut degré du numérateur et du dénominateur.*

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$	l+l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l>0	l>0	l<0	l<0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) > 0$	0 et $g(x) < 0$	0 et $g(x) < 0$	0
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limites usuelles:	*Limites usuelles:*
1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; 3) Si n est un entier naturel pair non nul: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$; 4) Si n est un entier naturel impair non nul: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.	5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$; 6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; 7) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; 8) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

Exemple 1:	*Exemple 2:*	*Exemple 3:*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par: $f(x) = \frac{4x+2}{x-2}$ (forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$) On factorise par le monôme de plus haut degré au numérareur et au dénominateur puis on simplifie $f(x) = \frac{4x+2}{x-2} = \frac{x\left(4+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{\left(4+\frac{2}{x}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$ Car $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$ et donc on obtient: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4+\frac{2}{x}\right) = 4$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right) = 1$	On considère la fonction f définie sur R par: $g(x) = x^2 + e^{-x}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ Donc par somme de limites: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$	On considère la fonction f définie sur R par: $h(x) = (3x-4) \times e^x$ $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x - 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ Donc par produit de limites: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

Les asymptotes:

Asymptote horizontale:	*Asymptote verticale:*	*ATTENTION:*
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k$ ou $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = k$ On dit que la droite d'équation $y = k$ est *asymptote horizontale* à la courbe en $+\infty$ ou en $-\infty$	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ On dit que la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à la courbe	Pour étudier la position relative de la courbe par rapport à son asymptote horizontale d'équation $y = k$, on étudie le signe de la différence: $f(x) - k$ - Si cette différence est positive alors la courbe est au-dessus de cette asymptote ; - Si cette différence est négative alors la courbe est en-dessous de cette asymptote.

Exemple 1:	*Exemple 2:*
On considère la fonction f définie sur $]2\ ;+\infty[$ par: $f(x) = \frac{4x+2}{x-2}$ On a vu dans l'exemple précédent que: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$ Donc la droite d'équation $y = 4$ est *asymptote horizontale* au voisinage de $+\infty$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ car: $\lim\limits_{x \to 2^+} (4x+2) = 10$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)} = +\infty$ La droite d'équation $x = 2$ est *asymptote verticale* à la courbe	On considère la fonction f définie sur $]2\ ;+\infty[$ par: $f(x) = \frac{4x+2}{x-2}$ Etudions la position relative de C_f par rapport à son asymptote horizontale $y = 4$ $f(x) - y = f(x) - 4 = \frac{(4x+2) - 4(x-2)}{(x-2)} = \frac{10}{(x-2)}$ $x > 2$ donc $x - 2 > 0$ Donc $f(x) - 4 > 0$ Ce qui signifie que la courbe C_f est au-dessus de l'asymptote horizontale .

Théorèmes:

Théorème comparaison:	*théorème d'encadrement (ou gendarmes):*
Soit f, g et h des fonctions définies sur un intervalle type $[a\ ;\ +\infty[$ **:** **1) Si pour x assez grand** $f(x) \geqslant g(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **2) Si pour x assez grand** $f(x) \leqslant h(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	**Soit f, g et h des fonctions définies sur un intervalle type** $[a\ ;\ +\infty[$ **:** **Si pour x assez grand** $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

Exemple 1:	*Exemple 2:*	*Exemple 3:*
Si pour tout réel x de $]-\infty\ ;\ 0[$ **,** $x^3+1 \leqslant f(x)$ **alors** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3+1\right) = -\infty$ **ATTENTION:** **Le théorème de comparaison ne permet pas de conclure**	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2-\cos(x)} = ?$ $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant -\cos(x) \leqslant 1$ $\Leftrightarrow 1 \leqslant 2-\cos(x) \leqslant 3$ **Passage à l'inverse:** $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\cos(x)} \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{3} \leqslant \dfrac{x}{2-\cos(x)} \leqslant x$ **avec** $x > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{3} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ **D'après le théorème d'encadrement (ou des gendarmes)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2-\cos(x)} = +\infty$	**Si f est définie sur** $[0\ ;\ +\infty[$ **,** **est telle que pour tout réel** $x \geqslant 0$ **,** $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$ **alors** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = ?$ $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ **car** $x \geqslant 0$ $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ $\Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}$ $\Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ **D'après le théorème d'encadrement (ou des gendarmes)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$