Fiche 1: Suites Récurrence et limites

A) Principe de récurrence:

Principe:	*Exemple:*
Raisonnement de récurrence: utile pour démontrer une propriété. **Exemple: une suite est majorée (minorée) par un réel M (m) si pour tout entier n,** $u_n \leqslant M \quad (u_n \geqslant m)$ **Trois phases à respecter:** **Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N}$ (ou un intervalle I de $\mathbb{N}$)** **1) *Initialisation*: phase indispensable** **On vérifie que la propriété est initialisée à partir d'un certain rang** n_0 **:** **P** (n_0) **est vraie** **2) *Hérédité*:** **La propriété est héréditaire à partir du rang** n_0 **:** **On suppose que la propriété est vraie au rang n et on doit montrer qu'elle est vraie au rang suivant (n+1) :** $\forall n \geqslant n_0$, P $(n) \Rightarrow$ P $(n+1)$ **3) *Conclusion*:** **La propriété est vraie pour tout** $n \geqslant n_0$.	**Soit un réel a strictement positif.** **On a alors:** $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+n\,a$ ***(Inégalité de Bernoulli)*** **• Initialisation :** $n=0$ $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$ **Donc** $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$ **La propriété est initialisée.** **• Hérédité : Soit n ∈ N,** **on suppose que** $(1+a)^n \geqslant 1+n\times a$ **et on doit montrer que:** $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\times a$ ***Démonstration:*** $(1+a)^n \geqslant 1+n\times a$ $\Rightarrow (1+a)\,(1+a)^n \geqslant (1+n\times a)\times(1+a)$ $\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant 1+a+n\times a+n\times a^2$ $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\times a+n\times a^2$ **avec** $n\times a^2>0$ $\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\times a$ **La propriété est héréditaire** **• Par initialisation et hérédité :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+n\times a$

Limites d'une suite:

Limites finies:	*Limites infinies:*
Suites convergentes: **Si une suite** (u_n) **a une limite finie l, alors la limite l est unique et:** $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = l$ **[ou** $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - l) = 0$ **]** **On dit que la suite** (u_n) **a pour limite l si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.** **Exemples:** $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, $k \geqslant 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$	***Suites divergentes:*** **On dit que la suite** (u_n) **a pour limite** $+\infty$ **(resp.** $-\infty$**) si, et seulement si, tout intervalle** $]A\ ;\ +\infty[$ **(resp.** $]-\infty\ ;\ B[$ **) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.** $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$ **ou** $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$ **On dit que la suite *diverge* vers** $+\infty$ **(resp.** $-\infty$ **)** **Exemples:** $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$, $k \geqslant 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Opérations sur les limites:
Soit donc (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

si		alors	
$\lim(u_n)$	$\lim(v_n)$	$\lim(u_n+v_n)$	$\lim(u_n v_n)$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell+\ell'$	$\ell\ell'$
$+\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell' > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell' < 0 \\ ? & \text{si } \ell' = 0 \end{cases}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$
$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } \ell' > 0 \\ +\infty & \text{si } \ell' < 0 \\ ? & \text{si } \ell' = 0 \end{cases}$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

si	alors
$\lim(u_n)$	$\lim(\frac{1}{u_n})$
$\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0$	$1/\ell$
0	?
0, avec $u_n > 0$ pour tout n	$+\infty$
0, avec $u_n < 0$ pour tout n	$-\infty$
$+\infty$	0
$-\infty$	0

Table – Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient

Exemple 1:	*Exemple 2:*	*Exemple 3:*
$u_n = n^3 + \frac{1}{n^2}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ **Donc** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, **par somme.**	$v_n = n^3 - n^2$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ **On obtient donc une forme indéterminée** $(\infty - \infty)$ $v_n = n^3 - n^2 = n^2(n-1)$ **(Penser à factoriser)** $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$ **Donc** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ **, par produit.**	$w_n = \frac{-3n^3}{n^2-1}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} -3n^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ **On obtient donc une forme indéterminée** $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ **(Penser à factoriser le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré et à simplifier)** $w_n = \frac{-3n^3}{n^2-1} = \frac{n^3 \times (-3)}{n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{n \times (-3)}{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} -3n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$ **Donc** $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$ **, par quotient.**

Limites et comparaison de suites:

Théorème de minoration:	*Théorème de majoration:*
Soit (u_n) **et** (v_n) **deux suites vérifiant à partir d'un certain rang** $u_n \leqslant v_n$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$	**Soit** (u_n) **et** (v_n) **deux suites vérifiant à partir d'un certain rang** $u_n \leqslant v_n$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
Théorème de comparaison:	*Théorème d'encadrement:*
Soit (u_n) **et** (v_n) **deux suites vérifiant à partir d'un certain rang** $u_n \leqslant v_n$ **Si** (u_n) **et** (v_n) **sont des suites convergentes de limites respectives l et l' alors** $l \leqslant l'$	**Soit** (u_n) , (v_n) **et** (w_n) **trois suites vérifiant à partir d'un certain rang** $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ **Si** (u_n) **et** (w_n) **sont des suites convergentes de même limite l alors la suite** (v_n) **est convergente et** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$

Exemple 1:	*Exemple 2:*
$u_n = n + 3\sin(n)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $u_n \geqslant n - 3$ car $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ on obtient $-3 \leqslant 3\sin(n) \leqslant 3$ d'où $n - 3 \leqslant n + 3\sin(n) \leqslant n + 3$ Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 3 = +\infty$, alors d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	$v_n = 4 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $\dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ On obtient $4 - \dfrac{1}{n} \leqslant 4 + \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant 4 + \dfrac{1}{n}$ On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} 4 + \dfrac{1}{n} = 4$ D'après le théorème d'encadrement (ou des gendarmes), $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 4$

Limites suites arithmétiques et géométriques:

Suites géométriques: $u_n = q^n$	*Exemple:*
(u_n) est une suite géométrique de raison q: 1) $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ 2) $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ 3) $q = 1$ alors la suite est constante 4) $q < -1$ alors la suite est divergente et n'admet pas de limite.	Déterminons la limite de la suite géométrique (u_n) de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = 3$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 3 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$
Suites monotones et limites:	*Exemple:*
Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$ Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$ *Théorème:* 1) Si une suite est *croissante* et *majorée* alors elle converge. 2) Si une suite est *décroissante* et *minorée* alors elle converge.	$u_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$ Montrons que la suite (u_n) est majorée par 2: Méthode: calculer $u_n - 2$ et montrer que $u_n - 2 \leqslant 0$ $u_n - 2 = \dfrac{2n+3}{n+2} - 2 = \dfrac{2n+3-2(n+2)}{n+2} = \dfrac{-1}{n+2} \leqslant 0$ $u_n - 2 \leqslant 0$ donc $u_n \leqslant 2$, la suite (u_n) est majorée par 2 Montrons que la suite (u_n) est croissante: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+5}{n+3} - \dfrac{2n+3}{n+2}$ $= \dfrac{(2n+5)(n+2)-(2n+3)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$ $= \dfrac{2n^2+9n+10-2n^2-9n-9}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$ La suite (u_n) est strictement croissante. Conclusion: La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 2 donc la suite (u_n) converge.