Fiche 11: Probabilités

Définitions:

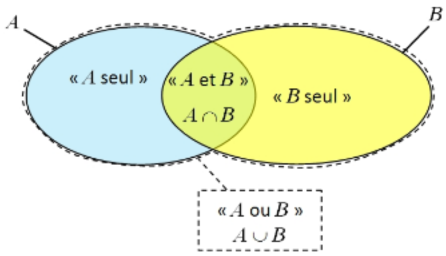
Expérience aléatoire:
On dit qu'une expérience est aléatoire lorsqu'il est impossible de prédire à l'avance le résultat.
Il y a donc plusieurs issues possibles.
On appelle issue ou éventualité le résultat d'une expérience.
L'univers est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire (on le note Ω).

Evénements:
On appelle événement tout ensemble d'issues d'une expérience aléatoire.
1) L'évènement certain est noté Ω, il est toujours réalisé.
2) L'évènement impossible est noté $\emptyset$, il ne se réalise jamais.

Opérations sur les événements:

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux évènements
1) L'évènement «A ne s'est pas réalisé » est l'évènement *contraire* de A noté $\bar{A}$.
2) L'évènement «au moins un des évènements A ou B s'est réalisé»est l'évènement «A ou B» noté $A \cup B$.
3) L'évènement «les évènements A et B se sont réalisés » est l'évènement «A et B» noté $A \cap B$.
4) Deux évènements qui ne peuvent pas être réalisés en même temps sont incompatibles: on a alors $A \cap B = \emptyset$.

Les évènements A et $\bar{A}$ sont incompatibles.



Exemple:

On lance deux dés non truqués et on note la somme obtenue:

On considère les événements suivants:
A: "obtenir un nombre pair" , donc
$A = \{2,4 , 6,8 , 10,12\}$
B: "obtenir un multiple de 3", donc $B = \{3,6 , 9,12\}$
$A \cup B$:"obtenir un nombre pair ou multiple de 3", donc
$A \cup B = \{2,3 , 4,6 , 8,9 , 10,12\}$
$A \cap B$:"obtenir un nombre pair et multiple de 3", donc
$A \cap B = \{6 , 12\}$

C: "obtenir un chiffre supérieur ou égal à 10", donc
$C = \{10,11 , 12\}$
D: "obtenir un chiffre compris entre 6 et 9", donc
$D = \{6,7 , 8,9\}$
$C \cap D = \emptyset$ donc les événements C et D sont incompatibles.

Tableau résultat:

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Definitions:

Ω désigne un univers de n éventualités $\{e_1 , e_2 , \ldots , e_n\}$
Définir une *loi de probabilité* p sur , c'est associer, à chaque évènement élémentaire e_i un nombre réel $p(e_i) = p_i$ de l'intervalle [0;1], tel que :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Issue e_i	e_1	e_2	e_3	...	e_{n-1}	e_n
Probabilté p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n

Equiprobabilité:
Dans une expérience aléatoire, si toutes les issues ont la même probabilté p de se réaliser on dit qu'il y a équiprobabilité.
Si cette expérience aléatoire comporte n issues alors $p = \frac{1}{n}$

Propriétés:

Soit Ω un univers fini sur lequel est définie une loi de probabilité.
On note la probabilité d'un événement A le réel noté $P(A)$ de même pour l'événement B on note $P(B)$ tel que:

1) $P(A) \in [0 ; 1]$
2) La probabilité $P(A)$ d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
3) $P(\Omega) = 1$
4) $P(\emptyset) = 0$
5) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ou $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
7) A et B deux événements incompatibles:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple 1:

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre obtenu sur la face supérieure.
Ω désigne un univers de 6 éventualités
$\{1,2\ ,\ 3,4\ ,\ 5,6\}$

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilté	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Soit A l'événement :"obtenir un nombre impair", donc
$A = \{1,3\ ,\ 5\}$
On a listé les issues qui réalisent l'événement A maintenant on additionne les probabilités des issues qui réalisent A:

$$P(A) = \frac{\text{nombre } d'issue \ de \ A}{\text{nombre } d'issues \ de \ \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exemple 2:

Deux types de maladies A ou B affectent les animaux d'un fermier.
Ce dernier estime que :
- **3% des animaux sont atteints de la maladie A et de la maladie B;**
- **12% des animaux sont atteints de la maladie A;**
- **8% des animaux sont atteints de la maladie B.**

Le fermier décide de noter : A l'évènement : « l'animal est atteint de la maladie A» et B l'évènement : « l'animal est atteint de la maladie B»
Il choisit un animal au hasard de son cheptel

	A	$\bar{A}$	Total
B	0,03	0,05	0,08
$\bar{B}$	0,09	0,83	0,92
Total	0,12	0,88	1

Il constate que:
1) **La probabilité qu'un animal soit atteint que de la maladie A est:**
$P\left(A \cap \bar{B}\right) = 0,09$
2) **La probabilité que cet animal ne soit pas malade est:**
$P\left(\bar{A} \cap \bar{B}\right) = 0,83$