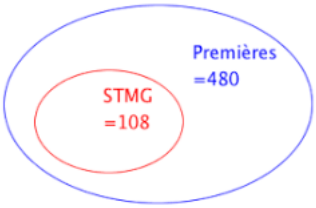
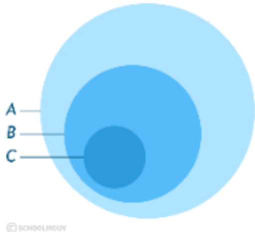
Fiche 10: Proportion et Pourcentage

Proportion:

Définition :	Remarque et propriétés:
Soit A une partie d'un ensemble E (on dit que E est la population et que A est une sous-population de E). On note n_E le nombre d'éléments (on dit aussi d'individus) de E, et n_A le nombre d'éléments de A. On appelle proportion de A dans E, ou encore proportion de A par rapport à E, le quotient $p = \frac{n_A}{n_E}$ *Exemple:* Dans un lycée, en 2012, 480 élèves étaient inscrits en classe de 1ère dont 108 avaient choisi la filière STMG  La population E = population de référence (1ère) = 480 La sous-population A =population STMG=108 La proportion d'élèves de STMG parmi tous les élèves de 1ère, notée p, est: $p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{108}{480} = \frac{9}{40} = 0{,}225$ Cette proportion peut s'exprimer en pourcentage: $p = 22{,}5\ \%$ *Un pourcentage est une proportion!*	1) Population = ensemble délèments appelés individus 2) Sous-population = une partie de la population 3) Une proportion est un rapport : c'est un nombre toujours compris entre 0 et 1. 4) Un pourcentage est un nombre réel compris entre 0 et 100 Propriété 1: Cacluler $p\ \%$ d'un nombre N, c'est multiplier N par $\frac{p}{100}$. Propriété 2: Pourcentage de pourcentage On considère une population A, B une sous-population de A et C une sous-population de B On note p_B la proportion d'individus de la population B dans A On note p_C la proportion d'individus de la population C dans B  La proportion p d'individus de C dans A est: $p = p_B \times p_C$ *Exemple:* Une société de 125 employés comte 32% de cadres L'effectif des cadres est: 32% de 125: $125 \times \frac{32}{100} = 40$ (propriété 1) Cette société compte 40 cadres. Parmi ces cadres on sait que 30% sont des femmes : $p = p_c \times p_f = \frac{32}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{12}{125} = 0{,}096$ (propriété 2) Les cadres femmes représentent 9,6% de l'ensemble des employés de l'entreprise. $125 \times \frac{12}{125} = 12$ Dans cette entreprise, il y a 12 cadres femmes

Variations et évolutions d'une quantité:

Définition:	Remarques:
on suppose qu'une quantité passe d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f 1) On appelle *Variation absolue* le nombre: $V_f - V_i$ 2) On apelle *Variation relative* ou *taux d'évolution* le nombre: $T = \frac{V_f - V_i}{V_i}$ T peut s'exprimer en pourcentage: $T = \frac{t}{100}$ 3) $T = \frac{V_f - V_i}{V_i}$ soit $T = \frac{V_f}{V_i} - 1$ d'où $\frac{V_f}{V_i} = 1 + T$ Finalement $V_f = (1+T)\, V_i = \left(1 + \frac{t}{100}\right) V_i$ On appelle *coefficient multplicateur* le nombre $(1+T)$ qui permet de passer de la valeur initiale à la valeur finale	1) $V_f - V_i > 0$, la quantité augmente 2) $V_f - V_i < 0$, la quantité diminue 3) $(1+t) > 1$, cas d'une hausse 4) $(1+t) < 1$, cas d'une baisse *Exemple:* En 2019 le prix d'un objet est de 80 euros En 2020 ce même objet coûte 150 euros Comme $V_f > V_i$, il s'agit d'une augmentation La variation absolue du prix, en euros: $V_f - V_i = 150 - 80 = 70$ La variation absolue est de 70 euros Le taux d'évolution est: $T = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{150-80}{80} = \frac{70}{80} = \frac{7}{8} = 0{,}875$ Donc le prix de lobjet a augmenté de 70 euros ce qui correspond à une augmentation de 87,5% *Attention*: Un taux d'évolution peut être supérieur à 100%

Propriété:	*Exemples:*

Propriété:

Lorsqu'une quantité subit deux évolutions successives dont les taux d'évolution respectifs sont T_1 et T_2 alors le taux d'évolution global est T et T vérifie :

$$(1+T)=(1+T_1)\times(1+T_2)=\left(1+\frac{t_1}{100}\right)\times\left(1+\frac{t_2}{100}\right)$$

V_0 valeur initiale

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[r, bend left, "\times(1+\frac{t_1}{100})"] \arrow[rr, bend right, "\times(1+\frac{t}{100})"'] & V_1 \arrow[r, bend left, "\times(1+\frac{t_2}{100})"] & V_2 \end{tikzcd}$$

Remarque:

on peut avoir :

- **2 augmentations successives,**
- **2 diminutions successives,**
- **une augmentation suivie d'une diminution**
- **une diminution suivie d'une augmentation**

Exemples:

1) Un prix subit une hausse de 20% suivie d'une hausse de 25%:

$$\left(1+\frac{20}{100}\right)\times\left(1+\frac{25}{100}\right)=1,2\times1,25=1+\frac{t}{100}$$

$$1+\frac{t}{100}=1,5 \text{ d'où } \frac{t}{100}=0,5 \text{ soit } t=50\ \%$$

Le taux d'évolution global est une hausse de 50 %

2) Un prix baisse de 30% puis augmente de 10%:

$$\left(1-\frac{30}{100}\right)\times\left(1+\frac{10}{100}\right)=0,7\times1,1=1+\frac{t}{100}$$

$$1+\frac{t}{100}=0,77 \text{ d'où } \frac{t}{100}=-0,23$$

Le taux d'évolution global est une baisse de 23 %

3) Un journal a vu ses abonnés augmenter de 45% en deux ans. On sait que la première année il a augmenté de 24%

$$\left(1+\frac{24}{100}\right)\times\left(1+\frac{t_2}{100}\right)=1,24\times\left(1+\frac{t_2}{100}\right)=1+\frac{45}{100}=1,45$$

$$1,24\times\left(1+\frac{t_2}{100}\right)=1,45 \text{ d'où } \left(1+\frac{t_2}{100}\right)=\frac{1,45}{1,24}=\frac{145}{124}$$

$$\frac{t_2}{100}=\frac{145}{124}-1=\frac{21}{124} \text{ d'où } t_2\approx16,9$$

Le nombre d'abonnés a augmenté de 16,9% la seconde année.

Propriété:	*Exemple:*

Propriété:

L'évolution réciproque de l'évolution de V_i à V_f est l'évolution de V_f à V_i .

C'est à dire, deux évolutions sont réciproques si, après ces deux évolutions, la valeur finale est égale à la valeur initiale.

$$\begin{tikzcd} V_I \arrow[r, bend left, "\times\left(1+\frac{t}{100}\right)"] & V_F \arrow[l, bend left, "\times\frac{1}{1+\frac{t}{100}}"] \end{tikzcd}$$

Deux évolutions sont réciproques lorsque le coefficient multiplicateur global de ces deux évolutions vaut 1.

C'est à dire que les coefficients multiplicateurs de deux évolutions réciproques sont inverses l'un de l'autre :

$$1+T'=\frac{1}{1+T}$$

ATTENTION:

Une baisse et une augmentation du même taux ne sont PAS réciproques!

Exemple:

Un prix subit une augmentation de 22%: ce qui correspond à un coefficient multiplicateur $1+\frac{22}{100}=1,22$

Le coefficient multiplicateur associé à la baisse réciproque est :

$$1+\frac{t'}{100}=\frac{1}{1+\frac{22}{100}}=\frac{50}{61}$$

$$\text{d'où } \frac{t'}{100}=\frac{50}{61}-1=-\frac{11}{61}\approx-0,1803$$

Donc $t'\approx18,03\ \%$

Une hausse de 22% et une baisse de 18,03% sont des évolutions réciproques.

On diminue de 18,03% un prix augmenté de 22% pour revenir au prix initial.

Séries statistiques:

Définition:

L'*effectif* d'une valeur du caractère étudié est le nombre d'individus de la population ayant cette valeur.

La *fréquence* d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total de la population (la fréquence peut être exprimée en pourcentage):

$$fréquence=\frac{effectif\ de\ la\ valeur}{effectif\ total}$$

***L'effectif cumulé croissant* de la valeur x_i est la somme des effectifs de toutes les valeurs inférieures ou égales à x_i .**

La *fréquence cumulée croissante* de la valeur x_i est la somme des fréquences de toutes les valeurs inférieures ou égales à x_i .

Exemple:

Une banque a effectué une enquête afin de comptabiliser le nombre de contrats d'assurance par client. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-contre: Effectif total clients: 808

Nombres de contrat	0	1	2	3
Effectif	98	256	367	87
Effectif cumulé croissant	98	354	721	808
Fréquence (en %)	$\frac{98}{808}\times100$	$\frac{256}{808}\times100$	$\frac{367}{808}\times100$	$\frac{87}{808}\times100$
Fréquence cumulée croissante (en %)	12,1	43,8	89,2	100

La fréquence cumulée croissante de la dernière valeur est 100%

Moyenne:

On considère la série statistique donnée par le tableau ci-contre.

Valeurs	x_1	x_2	...	x_p
Effectifs	n_1	n_2	...	n_p

On note l'effectif total:
$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$

La moyenne d'une série statistique est le quotient noté $\bar{x}$ de la somme de toutes les valeurs de cette série par l'effectif total:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p}{N}$$

Linéarité de la moyenne:
On considère deux réels a et b.
Si $\bar{x}$ est la moyenne d'une liste de réels (x_i) alors la moyenne $\bar{y}$ de la liste de réels $(a x_i + b)$ est donnée par
$\bar{y} = a\bar{x} + b$
Autrement dit si on augmente toutes les valeurs d'un même nombre b (>0 ou <0) alors la moyenne augmente de b. De même si on multilplie toutes les valeurs par a ou $\frac{1}{a}$, $a \neq 0$ alors la moyenne est multipliée par a ou $\frac{1}{a}$.

Médiane:

La médiane d'une série statistique est une valeur telle qu'il y ait autant d'observations ayant une valeur supérieure à la médiane que d'observations ayant une valeur inférieure à la médiane.

La médiane d'une série statistique de N valeurs *rangées par ordre croissant* est le nombre M_e défini par :
– Si l'effectif N est *impair*, la médiane M_e est la valeur centrale du caractère c'est à dire la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$ de la série ordonnée.
– Si l'effectif N est *pair*, la médiane M_e est la demi-somme des deux valeurs centrales du caractère c'est à dire la moyenne des valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$

La médiane n'est pas toujours égale à une donnée de la série statistique.

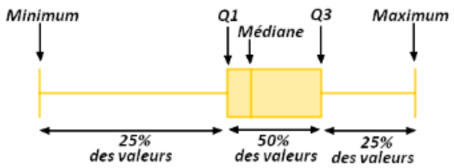
Les quartiles:

Les quartiles au nombre de trois Q_1 , $Q_2 = M_e$ et Q_3 partagent l'ensemble étudié de N éléments préalablement classés par valeurs croissantes, en quatre sous ensembles.

– Le premier quartile noté Q_1 est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins 25% des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_1 .
– Le troisième quartile noté Q_3 est la plus petite valeur de la série statistique telle qu'au moins 75% des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q_3 .

– Pour déterminer Q_1 on calcule $\frac{N}{4}$ et le rang de Q_1 est le nombre entier immédiatement supérieur ou égal à $\frac{N}{4}$.
– Pour déterminer Q_3 on calcule $\frac{3N}{4}$ et le rang de Q_3 est le nombre entier immédiatement supérieur ou égal à $\frac{3N}{4}$.

Caractéristiques de dispersion:



- Etendue: c'est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.
- Ecart interquartile: c'est la différence entre les troisième et premier quartiles: $Q_3 - Q_1$ (c'est un indicateur de dispersion: plus il est faible plus la série est homogène)
- Intervalle interquartile: $[Q_1 ; Q_3]$

Exemple:

On effectue une étude sur la taille des femelles anaconda géant (serpent d'Amérique du Sud).
On a relevé la taille de 100 femelles, les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous:

Taille (en m)	4	5	6	7	8	9
Effectif	7	22	14	20	19	18
Effectif cumulé croissant	7	29	43	63	82	100

Les caractéristiques de cette série sont:
1) Moyenne:
$\bar{x} = \frac{4\times7+5\times22+6\times14+7\times20+8\times19+9\times18}{100} = \frac{676}{100} = 6{,}76$
2) Médiane: c'est la demi-somme des $50^{ième}$ et $51^{ième}$ valeurs:
$\frac{7+7}{2} = 7$ donc $M_e = 7$
3) Premier Quartile: $\frac{N}{4} = 25$; c'est la $25^{ième}$ valeur: $Q_1 = 5$
4) Troisième Quartile: $\frac{3N}{4} = 75$; c'est la $75^{ième}$ valeur: $Q_3 = 8$
5) Etendue: $e =$ max – min $= 9 - 4 = 5$
6) Ecart interquartile: $Q_3 - Q_1 = 8 - 5 = 3$

Définition:	*Exemple:*
1) Variance d'une série statistique: $$\mathrm{V} = \frac{n_1\left(x_1-\left(x^-\right)\right)^2+n_2\left(x_2-\left(x^-\right)\right)^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ +n_p\left(x_p-\left(x^-\right)\right)^2}{\mathrm{N}}$$ $$\mathrm{V} = \frac{\sum_{i=1}^{i=p} n_i\times\left(x_i-\left(x^-\right)\right)^2}{\mathrm{N}}$$ **2) Ecart-type d'une série statistique: c'est le réel σ défini par:** $\sigma=\sqrt{\mathrm{V}}$ **La moyenne et l'écart-type prennent en compte toutes les valeurs de la série et sont donc influencés par les valeurs extrêmes.** **L'écart-type mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne : plus il est grand, plus les valeurs sont dispersées et moins la moyenne représente la série de façon significative.**	**Dans les rayons d'un supermarchés, on a relevé les masses, en kg, de deux catégories de poulet.** **1) Poulets fermiers: 2,930; 3,120; 3,280; 2,960; 3,355 et 2,875** **2) Poulets bio: 3,540; 4,280; 3,980; 3,625 et 3,150** **A la calculatrice on trouve:** **Poulets fermiers:** $x^-=3{,}087$ **et** $\sigma=0{,}181$ **Poulets bio:** $x^-=3{,}543$ **et** $\sigma=0{,}521$ **On constate que la série la plus dispersée est la série des poulets bio.**