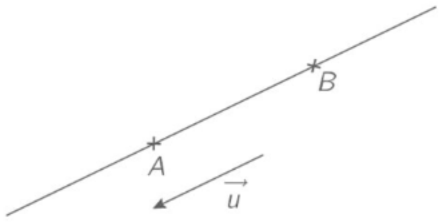
Fiche 9: Equations réduites et cartésiennes

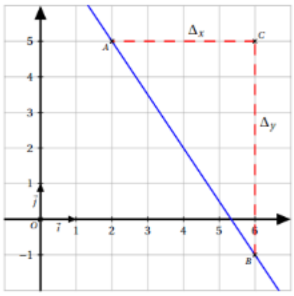
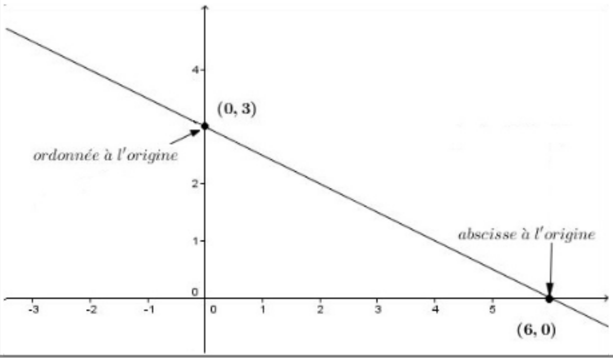
Le plan est muni d’un repère $(O\,;I\,,J)$

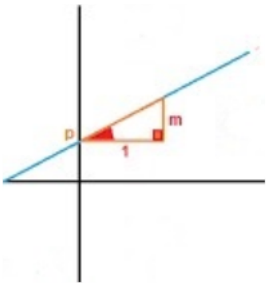
Partie A: Equations cartésiennes d'une droite

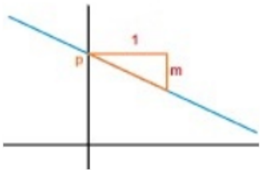
Définition:	*Propriété:*
On dit que $\vec{u}$ (vecteur non nul) est un vecteur directeur d’une droite (d) s’il existe deux points distincts A et B de cette droite (d) tels que: $\vec{u}=k\,\overrightarrow{AB}$  Un vecteur non nul est un vecteur directeur d'une droite s'il a la même direction que cette droite.	Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs respectifs de deux droites (d) et (d'). Les droites (d) et (d') sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. *Exemple:* Soit (d) la droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(3\,;8)$ et (d') la droite de vecteur directeur $\vec{v}\left(1\,;\frac{8}{3}\right)$. On veut montrer que les droites (d) et (d') sont parallèles. On remarque que: $\vec{u}=3\,\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires. Les droites (d) et (d') sont donc parallèles

Propriétés:	Exemples:
1) (d) est une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. La droite (d) est l’ensemble des points M du plan, tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. 2) L'ensemble des points M(x;y) du plan tels que: $ax+by+c=0$ avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ est une doite de vecteur directeur $\vec{u}\,(-b\,;a)$. *Réciproquement:* Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ où $\vec{u}\,(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de la droite. 3) Une équation de la droite (d) de la forme $ax+by+c=0$ est appelée *équation cartésienne* de la droite (d). *Cas particuliers:* 1) Si $a=0$, l'équation cartésienne est de la forme: $by+c=0$ soit $y=\frac{-c}{b}$, $b\neq0$, elle est donc de la forme $y=k$ et donc la droite d est parallèle à l'axe des abscisses: un vecteur directeur est $\vec{i}\,(1\,;0)$. 2) Si $b=0$, l'équation cartésienne est de la forme: $ax+c=0$ soit $x=\frac{-c}{a}$, $a\neq0$, elle est donc de la forme: $x=k$ et donc la droite d est parallèle à l'axe des ordonnées: un vecteur directeur est $\vec{j}\,(0\,;1)$.	1) On considère la droite (d) d'équation $2x-3y+2=0$ Un vecteur directeur de la droite (d) est: $\vec{u}\,(-b\,;a)$ soit $\vec{u}\left(-(-3)\,;2\right)$ d'où $\vec{u}\,(3\,;2)$. 2) Déterminons l'équation cartésienne de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}\,(-2\,;3)$ passant par le point A(4;1): $ax+by+c=3x+2y+c=0$ *Pour éterminer c:* on sait que la droite (d) passe par le point A, donc les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite (d): $3x_A+2y_A+c=3\times4+2\times1+c=14+c=0$ donc $c=-14$ Une équation cartésienne de la droite (d) est: $3x+2y-14=0$ 3) Déterminons l'éqaution cartésienne de la droite (d) passant par les points A(1;2) et B(0;3): Le vecteur directeur de la droite (d) est: $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A\,;y_B-y_A\right)$ d'où $\overrightarrow{AB}\,(0-1\,;3-2)$ donc $\overrightarrow{AB}\,(-1\,;1)$ Soit M un point du plan tel que $M\,(x\,;y)\in(d)$; on sait alors que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\,(x-1\,;y-2)$ et $\overrightarrow{AB}\,(-1\,;1)$ sont colinéaires. On sait que: si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors: $x\times y'-y\times x'=0$ $\overrightarrow{AM}\,(x-1\,;y-2)$ et $\overrightarrow{AB}\,(-1\,;1)$ sont colinéaires $\Leftrightarrow\ (x-1)\times(1)-(-1)\times(y-2)=0$ $\Leftrightarrow\ x-1+y-2=0$ $\Leftrightarrow\ x+y-3=0$ L'équation cartésienne de la droite (d) passant par A et B est donc: $x+y-3=0$.

Partie B: Equation réduite

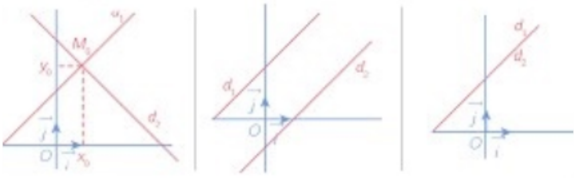
Définition:	*Exemple:*
On considère deux réels m et p. **On considère la droite d non parallèle à l'axe des ordonnées.** **On peut écrire:** $y = m\,x + p$ **cette équation est appelée** ***équation réduite de la droite d.*** **Sa représentation graphique est la** ***droite d*** **d'équation** $y = m\,x + p$ **- Le nombre a s'appelle le** ***coefficient directeur*** **(ou** ***pente de la droite)*** **de la droite d:** **A** $\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ **et B** $\left(x_B\ ;\ y_B\right)$ **deux points de la droite d** **On a:** $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta\ y}{\Delta\ x}$  **- Si** $m > 0$ **, alors la droite est inclinée vers le haut;** **- Si** $m < 0$ **, alors la droite est inclinée vers le bas;** **- Si** $m = 0$ **, alors la droite est parallèle à l'axe des abscisses .** **- Le nombre p est** ***l'ordonnée à l'origine*** **: la droite passe par le point de coordonnées** $(\,0\ ;\ p\,)$ **.**  	**On cherche l'équation d'une droite, elle est de la forme** $y = m\,x + p$ **Cette droite passe par les points de coordonnées** $A\ (0,1)$ **et** $B\left(\dfrac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ **On est amené à résoudre le système d'équations suivant :** $\begin{cases} y_A = m\,x_A + p \\ y_B = m\,x_B + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ \dfrac{1}{2}\ m + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ m = -p = -1 \\ p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ p = 1 \end{cases}$ **d'où l'équation de la droite est** $y = -\ 2\,x + 1$ **.** *D'une façon générale, la recherche de l'équation d'une droite sous la forme* $y = m\,x + p$ *conduit à un système de deux équations à deux inconnues m et p.* *Autre méthode:* **Les points** $A\ (0,1)$ **et** $B\left(\dfrac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ **n'ont pas la même abscisse, donc la droite** $(A\ B)$ **n'est pas parrallèle à l'axe des ordonnées et son équation réduite est de la forme** $y = m\,x + p$ $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0 - 1}{\dfrac{1}{2} - 0} = \dfrac{-1}{\dfrac{1}{2}} = (-1) \times \dfrac{2}{1} = -2$ $A \in (A\ B)$ **, donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite et donc on a:** $y_A = m\,x_A + p$ **soit** $1 = m \times 0 + p$ **d'où** $p = 1$ **La droite** $(A\ B)$ **a pour équation :** $y = -2\,x + 1$

<table>
<tr><th>Propriétés:</th><th>Interprétation géométrique du coefficient directeur:</th></tr>
<tr><td>
1) Si une droite d possède une équation réduite de la forme: $y = m\,x + p$ alors le vecteur $\vec{u}\ (\,1\ ;\ m\,)$ est un vecteur directeur de cette droite.
2) On considère deux droites d et d' d'équations réduites respectives: $y = m\,x + p$ et $y = m'\,x + p'$
Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si $m = m'$
3) Trois points A,B et C sont alignés si et seulement si les trois points ont la même abscisse ou si les droites $(A\ B)$ et $(A\ C)$ ont le même coefficient directeur.
</td><td>
<table>
<tr><th>Cas 1: $m > O$</th><th>Cas 2: $m < 0$</th></tr>
<tr><td>


Quand on augmente de 1 l'abscisse d'un point de d, l'ordonnée augmente de m.
</td><td>


Quand on augmente de 1 l'abscisse d'un point de d, l'ordonnée diminue de m.
</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Partie C: Lien entre les droites et les systèmes

Résoudre un système:	*Méthodes par combinaisons linéaires :*	*Méthodes par substitution:*
Résoudre un système revient à déterminer tous les *couples solutions* du système. **Soit a, b, a' et b' des nombres réels donnés.** **Résoudre le système d'équations** $\begin{cases} a\,x+b\,y=c \\ a'\,x+b'\,y=c' \end{cases}$ **c'est trouver tous les couples** $(x\ ;\ y)$ **de nombres réels, appelés solutions du système, vérifiant simultanément les deux équations du système .** **L'existence de solution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues dépend de l'intersection des deux droites** (d) **et** (d') **vérifiant chacune l'une des équations du système.** **d:** $a\,x+b\,y+c=0$ **d':** $a'\,x+b'\,y+c'=0$ **d'où le système:** $\begin{cases} a\,x+b\,y+c=0 \\ a'\,x+b'\,y+c'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\,x+b\,y=-c \\ a'\,x+b'\,y=-c' \end{cases}$ **Trois cas peut alors se produire :**  **1) Les droites** d **et** d' **sont sécantes.** **Il existe alors *une unique solution* au système :** **les coordonnées du point d'intersection de** d **et** d' **2) Les droites** d **et** d' **sont strictement parallèles.** **Il n'existe aucune solution au système.** **3) Les droites** d **et** d' **sont confondues.** **Il existe alors une droite solution au système.**	**On multiplie les coefficients de manière astucieuse afin d'additionner ou de soustraire les lignes dans le but d'éliminer une des inconnues** $\begin{cases} -x+y=7\ (1) \\ 2\,x+3\,y=11\ (2) \end{cases}$ **On multiplie (1) par 2** **et on additionne membre à membre** (1) **et** (2) $\begin{cases} -2\,x+2\,y=14\ \big(2\times(1)\big)=(1) \\ 0\,x+5\,y=25\ (1)+(2)=(2) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=7\ (1) \\ y=\dfrac{25}{5}=5\ (2) \end{cases}$ **On remplace y par sa valeur dans (1)** $\Leftrightarrow \begin{cases} -x+5=7 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=7-5 \\ y=5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$ **Ce système a une solution:** **le couple** $(-2\ ;\ 5)$ **On peut dire que les droites d et d' d'équations respectives:** $x-y+7=0$ **et** $2\,x+3\,y-11=0$ **sont sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées** $(-2\ ;\ 5)$	**On isole une inconnue, puis on la remplace dans la seconde équation.** $\begin{cases} x-3\,y=-4\ (1) \\ 3\,x+2\,y=10\ (2) \end{cases}$ **On exprime x en fonction de y dans (1) et on remplace dans (2)** $\begin{cases} x=3\,y-4 \\ 3\,(3\,y-4)+2\,y=10 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=3\,y-4 \\ 9\,y-12+2\,y=10 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=3\,y-4 \\ 11\,y=10+12=22 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=3\,y-4 \\ y=\dfrac{22}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\times 2-4 \\ y=2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ **Ce système a une solution:** **le couple** $(2\ ;\ 2)$ **On peut dire que les droites d et d' d'équations respectives:** $x-3\,y+4=0$ **et** $3\,x+2\,y-10=0$ **sont sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées** $(2\ ;\ 2)$