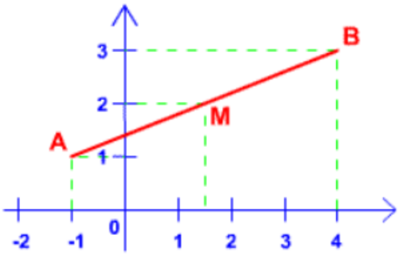
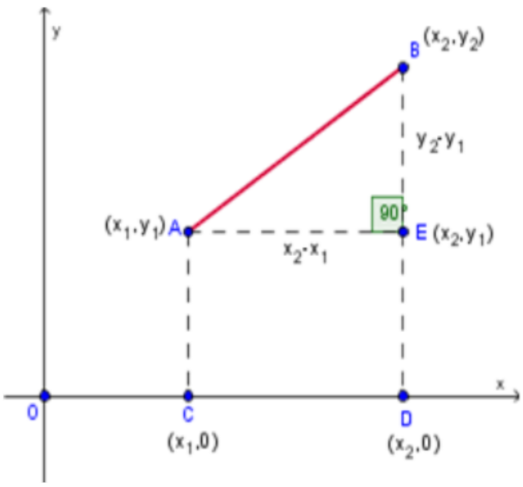
Fiche 8: Vecteurs Colinéaires et Orthogonalité

Pré-requis:

Un *repère orthonormé* d'origine O est un triplet (O;I;J) de points tels que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.

$\left(\vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ une base orthonormée.

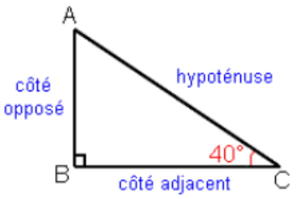
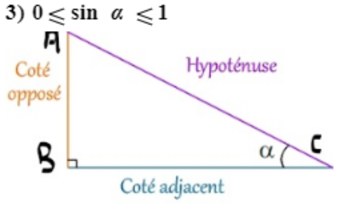
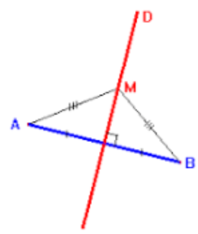
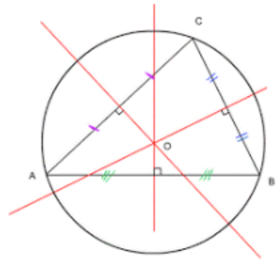
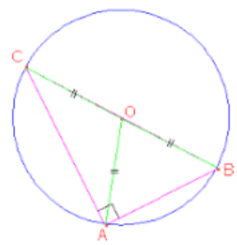
Milieu d'un segment :	*Distance entre deux points :*
On considère un repère orthonormé $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\right)$ deux points .  Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(x_M\ ;\ y_M\right)$: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$ On utilisera cette propriété pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ou pour déterminer les coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme connaissant celles des trois autres. (car *un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.*)	On considère un repère orthonormé $A\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ et $B\left(x_2\ ;\ y_2\right)$ deux points .  La distance entre les points A et B est: $AB = \sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$ Dans les calculs on calculera tout d'abord AB^2 puis ensuite AB, en utilisant la "racine carrée".

Vecteurs et colinéarité :

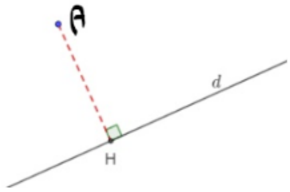
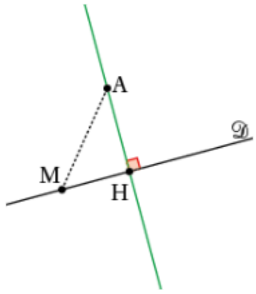
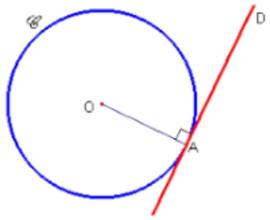
Règle: Colinéarité de vecteurs	*Coordonnées:*	*Exemples:*
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* s'il existe un réel k tel que: $\vec{u} = k\ \vec{v}$ ou $\vec{v} = k\ \vec{u}$ Remarques: 1) Comme $0\ \vec{u} = \vec{0}$, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur. 2) Deux vecteurs *non nuls* sont colinéaires si, etseulement si, ils ont la *même direction*. Conséquences: On considère quatre points A, B , C et D avec A distinct de B et C distinct de D. 1) Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. 2) Trois points sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.	Soit $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ un repère du plan On considère deux vecteurs $\vec{u}\ (x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\ (x'\ ;\ y')$ colinéaires et il existe $k \in \mathbb{R}$. $\vec{v} = k\ \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = k\,x \\ y' = k\,y \end{cases}$	1) On considère les vecteurs suivants: $\vec{u}\ (1\ ;\ -3)$ et $\vec{v}\ (-3\ ;\ 9)$ On a: $\begin{cases} -3 = 1\times(-3) \\ 9 = (-3)\times(-3) \end{cases}$ On constate que: $\vec{v} = -3\ \vec{u}$ avec $k = -3$ Les deux vecteurs sont colinéaires. 2) On considère les points $A(-1\ ;\ 1)$, $B(-2\ ;\ -2)$, $C(3\ ;\ -4)$ et $D(6\ ;\ 5)$ $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A\ ;\ y_B-y_A\right)$ soit $\overrightarrow{AB}\ (-1\ ;\ -3)$ $\overrightarrow{CD}\left(x_D-x_C\ ;\ y_D-y_C\right)$ soit $\overrightarrow{CD}\ (3\ ;\ 9)$ On a: $\begin{cases} 3 = (-1)\times(-3) \\ 9 = (-3)\times(-3) \end{cases}$ On constate que: $\overrightarrow{CD} = -3\ \overrightarrow{AB}$ avec $k = -3$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires; ce qui signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. 3) On considère les points $A(-1\ ;\ 1)$, $B(-2\ ;\ -2)$ et $C(-3\ ;\ -5)$ $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A\ ;\ y_B-y_A\right)$ soit $\overrightarrow{AB}\ (-1\ ;\ -3)$ $\overrightarrow{AC}\left(x_C-x_A\ ;\ y_C-y_A\right)$ soit $\overrightarrow{AC}\ (-2\ ;\ -6)$ On a: $\begin{cases} -2 = (-1)\times(2) \\ -6 = (-3)\times(2) \end{cases}$ On constate que: $\overrightarrow{AC} = 2\ \overrightarrow{AB}$ avec $k = 2$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires; ce qui signifie que les points A,B et C sont alignés.

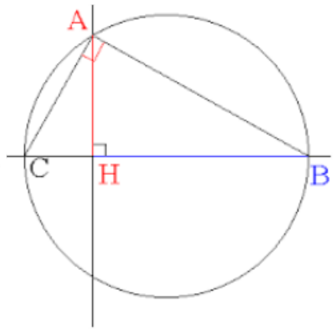
Propriété:	*Exemple:*
Dans un repère, on donne les vecteurs $\vec{u}\ (x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\ (x'\ ;\ y')$ **Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, si, et seulement si:** $dét\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)=\left(x\times y'-y\times x'=0\right.$	**On considère les vecteurs $\vec{u}\ (-2\ ;\ 1)$ et $\vec{v}\ (8\ ;\ -4)$** **Comme on a:** $dét\left(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)=x\times y'-y\times x'=(-2)\times(-4)-1\times 8=8-8=0$ **Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.**

Trigonométrie:

Définition:	*Représentation graphique:*	*Propriétés:*
1) $Cos=\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$ 2) $Sin=\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}$ 3) $Tan=\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$	 $cos\,40°=\dfrac{BC}{AC}$; $sin\,40°=\dfrac{AB}{AC}$ et $tan\,40°=\dfrac{AB}{BC}$	**Soient ABC un triangle rectangle en B et α un angle aigu de ce triangle, on a:** **1) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$** **2) $0\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$** **3) $0\leqslant\sin\alpha\leqslant 1$**  **4) La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite des points M équidistants (à la même distance) des extrémités du segment**  **5) Les médiatrices d'un triangle sont concourrantes (= se coupent en un même point) en un point O appelé *centre du cercle circonscrit* à ce triangle.**  **6) Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypothénuse.** 

Projeté orthogonal d'un point sur une droite:

Définitions:	*Représentations graphiques:*
(1) On considère une droirte d et un point A du plan. **$A \notin d$, le point d'intersection H de la droite d avec sa perpendiculaire passant par A est appelé le *projeté orthogonal* de A sur d.** **$A \in d$, alors A est son propre *projeté orthogonal* sur d.**	(1) 
(2) On considère une droite d, un point A du plan et son projeté orthogonal H sur la droite d. **La distance AH est appelée *distance* du point A à la droite d.** **Le projeté orthogonal H de A sur d est le point de la droite d le plus proche du point A:** **$AM > AH$**	(2) 
(3) On considère un cercle C de centre O et de rayon R **On dit que la droite D est une tangente au cercle C lorsque la distance du point O à la droite D est égale au rayon $R = OA$**	(3) 

Exemples:	*Représentation graphique:*
1) Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) . Les triangles ABH et AHC sont rectangles en H et on a: $\tan \widehat{ACH} = \frac{AH}{HC}$ **et** $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{HB}$ $\tan \widehat{ABH} = \frac{\sin \widehat{ABH}}{\cos \widehat{ABH}} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{\cos \widehat{ABC}} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{AB}$ $\tan \widehat{ACH} = \frac{\sin \widehat{ACH}}{\cos \widehat{ACH}} = \frac{\sin \widehat{ACB}}{\cos \widehat{ACB}} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AC}{BC}} = \frac{AB}{AC}$ **d'où** $\frac{1}{\tan \widehat{ACH}} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB}$ **donc** $\tan \widehat{ABH} = \frac{1}{\tan \widehat{ACH}}$ **Finalement on obtient:** $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{HB} = \frac{1}{\tan \widehat{ACH}} = \frac{AH}{HC}$ $\frac{AH}{HB} = \frac{HC}{AH} \Leftrightarrow AH \times AH = HC \times HB \Leftrightarrow AH^2 = HB \times HC$	(1) 
2) On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6$ et $AC = 8$ **Déterminons la distance du point A au côté $[BC]$:** **Soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. Le triangle ABC est rectangle en A** **D'après le théorème de pythagore, on a:** $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$ **soit** $BC = 10$ **L'aire du triangle ABC peut s'obtenir de 2 façons différentes:** $A = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$ **et** $A = \frac{AH \times BC}{2} = 24 \Leftrightarrow 2 \times 24 = 10\,AH$ **Soit** $AH = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$ **.La distance du point A au côté $[BC]$ est donc égale à** $\frac{24}{5}$	(2)