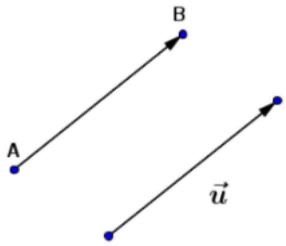
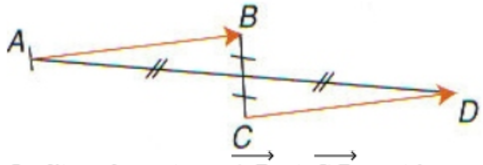
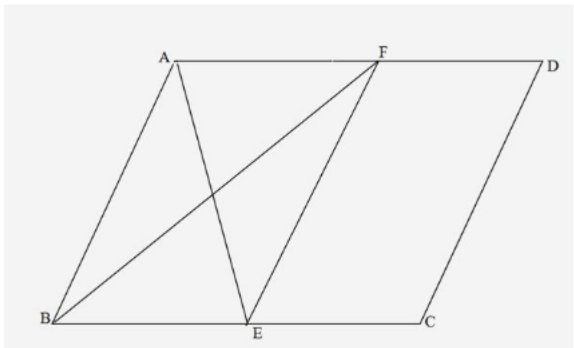
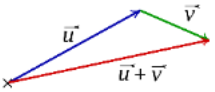
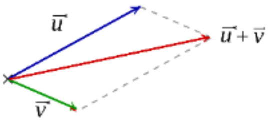
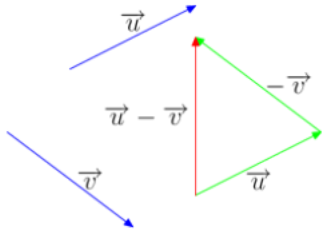
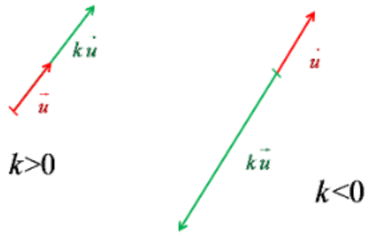
Fiche 7: Vecteurs

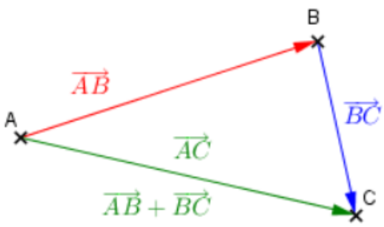
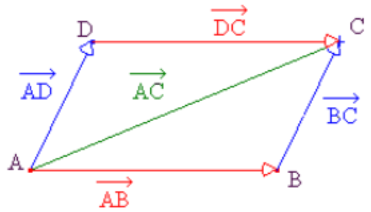
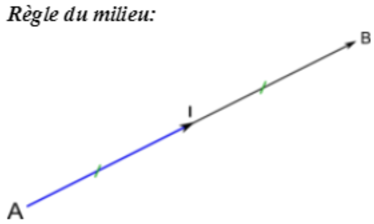
Notion de vecteurs :

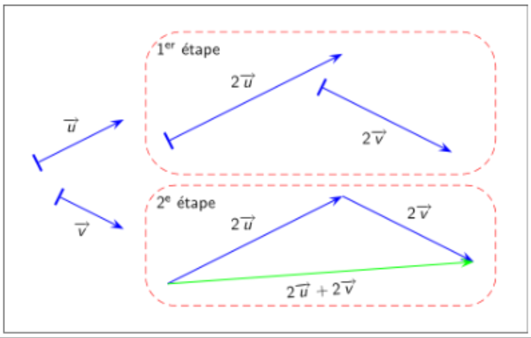
Définitions:	*Représentation graphique:*	*Propriété et conséquence:*
Un vecteur est donné par : - *une direction;* - *un sens;* - *une longueur.* Soient A et B sont deux points distincts du plan Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est associé à la translation qui transforme A en B . La notation $\overrightarrow{AB}$ implique *trois* informations: 1) La direction, celle de la droite (AB) ; 2) Le sens: de A vers B (A est l'origine et B son extrémité); 3) La longueur: AB (qu'on appelle norme du vecteur et qu'on note: $\Vert \overrightarrow{AB} \Vert = AB$). Il existe une infinité de vecteurs égaux au vecteur $\vec{u}$: on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$. *Cas particuliers:* A et B deux points du plan 1) translation qui transforme A en A $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$; on appelle ce vecteur le vecteur nul. 2) $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.	 Deux vecteurs non nuls sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même norme	Soient A et B deux points du plan. La translation qui transforme A enB associe à tout point C du plan, l'unique point D tel que les segments [AD]et [BC] aient le même milieu. Cette translation est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.  On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, on note: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, même sens et même longueur. Conséquence: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati) *ATTENTION à l'ordre des points* Propriété: La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est différente de la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ qui transforme B en A est appelé *vecteur opposé* à $\overrightarrow{AB}$ Les vecteurs opposés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction, même longueur MAIS sens contraire: on note: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Exemple:	*Représentation graphique:*
On considère deux parallélogrammes ABCD ET ABEF ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ABEF est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$ On a donc: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$. Par conséquent: CDFE est un parallélogramme car $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{DC}$.	

Opérations sur les vecteurs:

Addition:	*Soustraction:*	*Multplication:*
La somme de deux vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant à la translation de $\vec{u}$ suivie de la translation de $\vec{v}$   1) L'ordre n'a pas d'importance: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ 2) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ 3) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$	La différence de deux vecteurs $\vec{u}-\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant à la translation de $\vec{u}$ suivie de la translation de $-\vec{v}$  $\vec{u}-\vec{u}=\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$	 1^{er} *cas:* $k>0$ Le vecteur $k\ \vec{u}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$ 2^{nd} *cas:* $k<0$ Le vecteur $k\ \vec{u}$ de sens opposé au sens du vecteur $\vec{u}$ Propriétés: 1) $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=k\ \vec{u}+k\ \vec{v}$ 2) $(k+k')\ \vec{u}=k\ \vec{u}+k'\ \vec{u}$ 3) $k\ \vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$

Règles:		
Relation de Chasles :  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	*Règle du parallélogramme:*  $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme	*Règle du milieu:*  I milieu de $[AB]$ alors, on a: 1) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 2) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ 3) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ 4) Pour tout point M du plan: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\ \overrightarrow{MI}$

Exemple:	*Exemple:*
Construction de: $2\ \vec{u}+2\ \vec{v}$ grâce à la connaissance des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$  	ABCD est un parallélogramme et I le milieu du segment [BC] . On donne $\vec{u}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{CI}$ Ecrivons plus simplement $\vec{u}$: *Méthode:* Dans une somme on peut intervertir l'ordre des veteurs; on obtient donc: $\vec{u}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}$ Ensuite on utilise deux fois de suite la relation de Chasles: on obtient donc: $\vec{u}=\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI}\right)+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IA}$ D'où $\vec{u}=\overrightarrow{DA}$

Coordonnées d'un vecteur :

Le plan est munid'un repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$, c'est un repère orthonormé: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

On considère les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dont les directions sont perpendiculaires , on dit que $\left(\vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ est une base orthonormée .

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un couple unique de réels $(x\ ;\ y)$ tel que: $\vec{u} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j}$

on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$

Soit $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ un repère du plan et deux points $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\right)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ sont :

$$\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\right)$$

Propriété:

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées respectives sont égales.

$\vec{u}\ (x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\ (x'\ ;\ y')$ si $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

Définition et propriété:	*Exemple:*
Soit $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ un repère du plan et deux points $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B\left(x_B\ ;\ y_B\right)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ sont : $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\right)$ La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$ *Propriété:* Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées respectives sont égales. $\vec{u}\ (x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\ (x'\ ;\ y')$ si $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.	Dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ on considère les points suivants: A(-2; 1) , B(2;4), C(3;0) et D(-1;-3) $\overrightarrow{AB}\ \left(2-(-2)\ ;\ 4-1\right)$ donc $\overrightarrow{AB}\ (4\ ;\ 3)$ $\overrightarrow{DC}\ \left(3-(-1)\ ;\ 0-(-3)\right)$ donc $\overrightarrow{DC}\ (4\ ;\ 3)$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux. Par conséquent, on en déduit que ABCD est un parallélogramme.

Coordonnées: addition	*Coordonées: soustraction*	*Coordonnées: produit*
Soit $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ un repère du plan et deux vecteurs $\vec{u}\ (x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\ (x'\ ;\ y')$: $\vec{u} + \vec{v}\ (x + x'\ ;\ y + y')$	Soit $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ un repère du plan et deux vecteurs $\vec{u}\ (x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\ (x'\ ;\ y')$: $\vec{u} - \vec{v}\ (x - x'\ ;\ y - y')$	Soit $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ un repère du plan $k \in R$ et $\vec{u}\ (x\ ;\ y)$: $k\ \vec{u}\ (k\,x\ ;\ k\,y)$

Exemple:
Dans un repère orthonormé, on a les points $A\ (2\ ;\ 1)$; $B\ (3\ ;\ 4)$ $C\ (6\ ;\ 5)$ et $D\ (5\ ;\ 2)$ $\overrightarrow{AB}\ (3-2\ ;\ 4-1)$ donc $\overrightarrow{AB}\ (1\ ;\ 3)$ $\overrightarrow{DC}\ (6-5\ ;\ 5-2)$ donc $\overrightarrow{DC}\ (1\ ;\ 3)$ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux. Par conséquent, on en déduit que ABCD est un parallélogramme. Calculons $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ et $CD = \sqrt{\left(x_C - x_D\right)^2 + \left(y_C - y_D\right)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ Donc $AB = DC$ Par conséquent, ABCD étant un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont de même longueur; ABCD a donc ses quatre côtés de même longueur: c'est un losange.