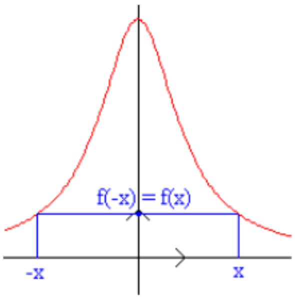
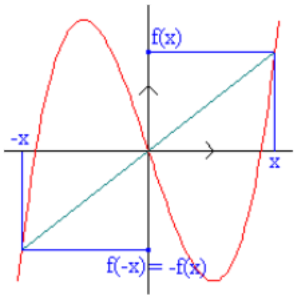
Fiche 6: Variations des fonctions

Fonctions paires et impaires:

<table>
<tr><th>Fonctions paires:</th><th>Fonctions impaires:</th></tr>
<tr><td>
Une fonction f , définie sur un ensemble I est paire lorsque :
a) I est centré en zéro.
b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$

Représentation graphique:
Dans un repère quelconque, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.


Exemples:
1) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
2) $I = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$
</td><td>
Une fonction f, définie sur un ensemble I est impaire lorsque :
a) I est centré en zéro.
b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$

Représentation graphique:
Dans un repère quelconque, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.


Exemples:
1) $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$
2) $I = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$
</td></tr>
</table>

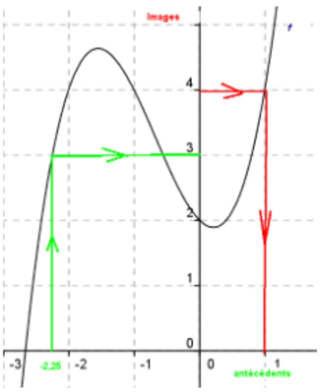
<table>
<tr><td>
Exemple:
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
f est définie sur $\mathbb{R}$, on a: $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$
$f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2+1}$
$f(-x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
$f(-x) = f(x)$
La fonction f est paire .
</td><td>
Exemple:
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
g est définie sur $\mathbb{R}$, on a: $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$
$f(-x) = \dfrac{(-x)}{(-x)^2+1}$
$f(-x) = \dfrac{-x}{x^2+1} = -\dfrac{x}{x^2+1}$
$f(-x) = -f(x)$
La fonction f est impaire.
</td><td>
Exemple:
On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par:
$h(x) = x^2 + x$
h est définie sur $\mathbb{R}$, on a: $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$
$h(-x) = (-x)^2 + (-x)$
$h(-x) = x^2 - x$
$h(-x) \neq h(x)$
La fonction h n'est pas paire.
De plus, $h(-x) \neq -h(x)$
La fonction h n'est pas impaire.

A retenir:
Une fonction peut n'être ni paire ni impaire.
</td></tr>
</table>

Variations et extremum d'une fonction:

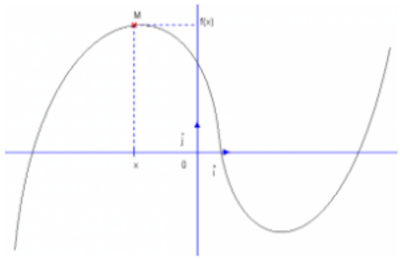
Définition:

Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.
Une fonction numérique f , définie sur D, est un procédé qui, à chaque nombre de $x \in D$ associe un unique nombre, noté $f(x)$.
Le réel x est appelé la variable et $f(x)$ est l'*image* de x par f .
On dit que x est un *antécédent* de $f(x)$



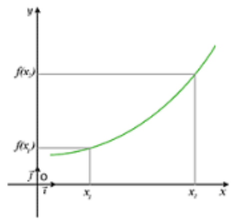
Courbe représentative C_f :

Soit f une fonction définie sur D.
La courbe C_f , représentative de f , est l'ensemble des points $M\left(x\ ;\ f(x)\right)$ où $x \in \mathbb{R}$

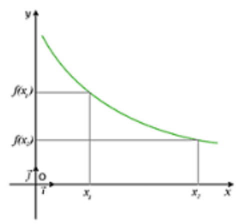


Sens de variations:

Une fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I, si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ augmentent aussi.
Ce qui veut dire:
Pour tous x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$: *une fonction croissante conserve l'ordre.*



Fonction croissante

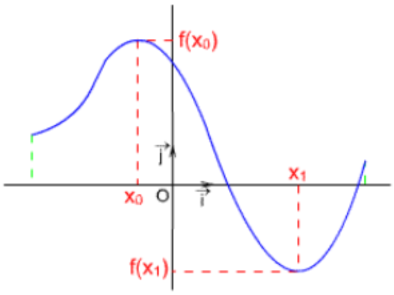


Fonction décroissante

Une fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I, si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ diminuent.
Ce qui veut dire:
Pour tous x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$: *une fonction décroissante renverse l'ordre.*

Extrema: Maximum ou Minimum

1) La fonction f admet un ***maximum*** en x_0 sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \leqslant f\left(x_0\right)$



2) La fonction f admet un ***minimum*** en x_1 sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \geqslant f\left(x_1\right)$

Tableaux de variations:

Un tableau de variation sert à rassembler toutes les informations sur les variations d'une fonction.

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-4\ ;\ 7]$ représentation graphique de la fonction f:

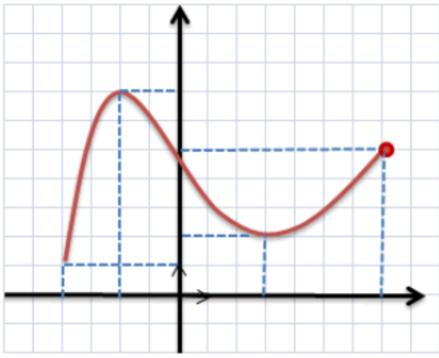


Tableau de variaitions de la fonction f

x	-4		-2		3		7
f	1	↗	7	↘	2	↗	5

La fonction est croissante sur l'intervalle $]-4\ ;\ 2]$, décroissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$ et croissante sur l'intervalle $[3\ ;\ 7]$

Le point $A\ (-2\ ;\ 7)$ est le point "le plus haut" de la courbe sur $]-4\ ;\ 7]$: on dit que 7 est le ***maximum*** de f sur $]-4\ ;\ 7]$ et il est atteint en -2 .

Le point $B\ (3\ ;\ 2)$ est le point "le plus bas" de la courbe sur $]-4\ ;\ 7]$: on dit que 2 est le ***minimum*** de f sur $]-4\ ;\ 7]$ et il est atteint en 3 .