Fiche 5: Fonctions Inverse et Racine Carrée

Fonctions Inverse:

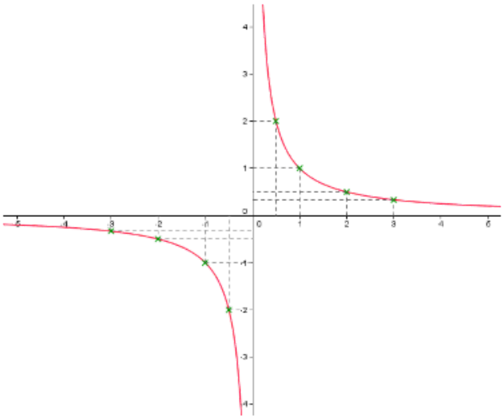
Définition et variations:

La fonction *inverse* est la fonction définie pour tout x réel non nul par: $x \mapsto \frac{1}{x}$

Tableau de variations:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	↘ ‖ ↘

Représentation graphique:
La courbe représentative de la fonction inverse est appelée hyperbole, elle est symétrique par rapport à l'origine O du repère.



Propriétes:

Propriétés:
1) Deux nombres réels de ***même signe*** et leurs inverses sont rangés dans l'***ordre contraire***:

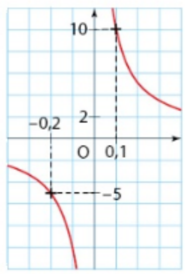
Soient $a < b$ alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Exemple:
Soient a et b des nombres réels

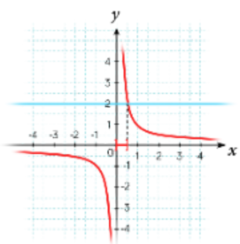
x	$-\infty$	a		-3		0		5		b	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{a}$	↘	$\frac{-1}{3}$	↘	‖	↘	$\frac{1}{5}$	↘	$\frac{1}{b}$	↘

- Si $a \leqslant -3$ alors $\frac{-1}{3} \leqslant \frac{1}{a}$ car a et -3 sont négatifs donc leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire
- Si $5 \leqslant b$ alors $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{5}$ car 5 et b sont positifs donc leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire

2) Pour tout réel a non nul, l'équation $\frac{1}{x} = a$ possède une unique solution $\frac{1}{a}$



Exemples:
1) L'équation $\frac{1}{x} = 10$ possède une unique solution $\frac{1}{10} = 0{,}1$
2) L'équation $\frac{1}{x} = -5$ possède une unique solution $\frac{-1}{5} = -0{,}2$
3) Pour résoudre une inéquation, on s'aide de la courbe représentative de la fonction Inverse
Exemples:



$\frac{1}{x} \leqslant 2$: on trace la droite d'équation $y = 2$

L'ensemble des solutions est: $]-\infty\ ;\ 2] \cup \left[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$

(On regarde les points situés en-dessous de la droite d'équation $y = 2$)
$\frac{1}{x} > 2$: l'ensemble des solutions est: $\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$
(On regarde les points situés au-dessus de la droite d'équation $y = 2$)
4) Pour tout réel x non nul, on a: $f(x) = -f(-x)$.
On dit que la fonction Inverse est *impaire* .

Conséquences:
Comme la fonction Inverse est *impaire*, cela signifie que l'origine du repère est ***le centre de symétrie*** pour la courbe représentative de la fonction f (voir graphique).

Fonctions Racines Carrées:

Définition et variations:	*Propriétes:*

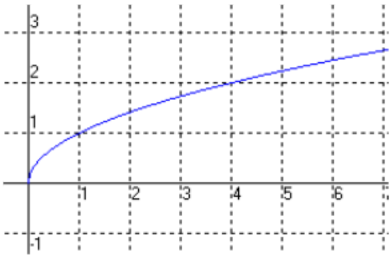
Définition et variations:

La fonction *Racine Carrée* est la fonction définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par: $x \mapsto \sqrt{x}$

Tableau de variations:

x	$0 \quad +\infty$
$f(x)$	$0 \quad \nearrow$

Représentation graphique:



Propriétes:

Propriétés:

1) Pour tout nombre réel a positif, l'équation $\sqrt{x} = a$ possède une ***unique*** solution a^2 .

Exemples:

a) $\sqrt{x} = 10$ la solution est 100 : $S = \{10^2\} = \{100\}$

b) $\sqrt{x} = -9$ il n'y a pas de solution: $S = \emptyset$

2) Pour tout réel x, on a: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemples:

a) $\sqrt{2^2} = 2$

b) $\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$

3) On considère deux nombres a et b positifs.

On a: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

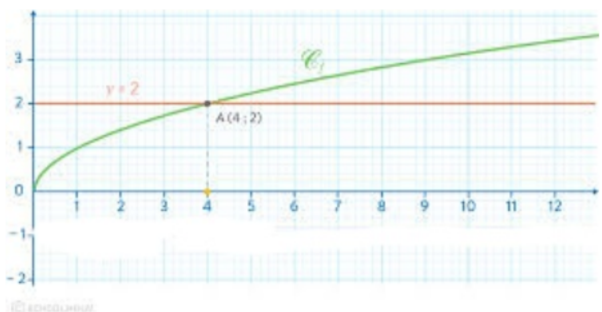
La fonction *Racine Carrée* est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ alors on conserve l'ordre!

4) Résoudre les inéquations $\sqrt{x} \leqslant a$ et $\sqrt{x} \geqslant a$:

a est un nombre réel:

Ensemble Solutions	$\sqrt{x} \leqslant a$	$\sqrt{x} \geqslant a$
$a \geqslant 0$	$[0\ ;\ a^2]$	$[a^2\ ;\ +\infty[$
$a < 0$	$\emptyset$	$[0\ ;\ +\infty[$

Exemples:



$\sqrt{x} \leqslant 2$: on trace la droite d'équation $y = 2$

L'ensemble des solutions est: $[0\ ;\ 4]$

(On regarde les points situés en-dessous de la droite d'équation $y = 2$)

$\sqrt{x} > 2$: l'ensemble des solutions est: $]4\ ;\ +\infty[$

(On regarde les points situés au-dessus de la droite d'équation $y = 2$)

Signes d'un quotient de facteurs du 1^{er} degré:

<table>
<tr><th>Propriétés:</th><th>Méthodes:</th><th>Exemples:</th></tr>
<tr>
<td>1) Le quotient de deux nombres réels de même signe est positif;
2) Le quotient de deux nombres réels de signes contraires est négatif.</td>
<td>Pour étudier le signe d'un quotient :

Le quotient $\frac{ax+b}{cx+d}$ avec $cx+d \neq 0$:
1) Le quotient de deux nombres réels de même signe est positif;
2) Le quotient de deux nombres réels de signes différents est négatif.

Pour déterminer le signe du quotient, on étudie le signe du numérateur et du dénominateur; on donne les informations dans un tableau et on déduit le signe du quotient grâce à la règle des signes.
On n'oublie pas la "double barre" pour la valeur interdite.</td>
<td>1) Tableau de signes: $\frac{3x-5}{-2-x}$
$3x-5=0 \iff 3x=5 \iff x=\frac{5}{3}$ et
$-2-x=0 \iff -x=2 \iff x=-2$ (valeur interdite)
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-2</td><td></td><td>$\frac{5}{3}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$3x-5$</td><td></td><td>$-$</td><td>|</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$(-2-x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>|</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{(3x-5)}{(-2-x)}$</td><td></td><td>$-$</td><td>‖</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
</table>
2) Résoudre l'inégalité suivante: $\frac{(3x+1)}{(2x+3)} \leqslant 0$
$3x+1=0 \iff 3x=-1 \iff x=\frac{-1}{3}$ et
$2x+3=0 \iff 2x=-3 \iff x=\frac{-3}{2}$ (valeur interdite)
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$-\frac{3}{2}$</td><td></td><td>$\frac{-1}{3}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$3x+1$</td><td></td><td>$-$</td><td>|</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$2x+3$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>|</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{(3x+1)}{(2x+3)}$</td><td></td><td>$+$</td><td>‖</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>
$\frac{(3x+1)}{(2x+3)} \leqslant 0$ la solution est $\left]\frac{-3}{2} ; \frac{-1}{3}\right]$</td>
</tr>
</table>