Fiche 4: Fonctions Carrée et Cube

Fonctions Carrées:

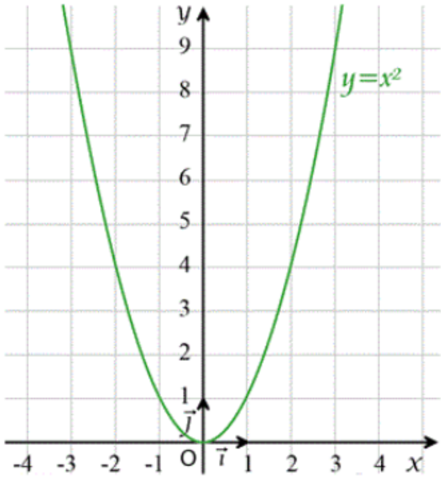
Définition et variations:

La fonction *carrée* est la fonction définie pour tout x réel par: $x \longmapsto x^2$

Tableau de variations:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Représentation graphique:
La courbe représentative de la fonction carrée est appelée ***parabole*** de sommet O.



Propriétes:

Propriétés:

1) Un carré est toujours positif: $(-2)^2=4$
2) Soit a un réel:
   - Si $a>0$, l'équation $x^2=a$ possède 2 solutions: $-\sqrt{a}$ ou $\sqrt{a}$
   - Si $a=0$, l'équation $x^2=a$ possède une solution: 0
   - Si $a<0$, l'équation $x^2=a$ ne possède aucune solution

Exemples:

a) $x^2=9$ les solutions sont $-\sqrt{9}=-3$ ET $\sqrt{9}=3$ donc $S=\{-3\ ;\ 3\}$
b) $x^2=-6$ ne possède pas de solution car $-6<0$ donc $S=\emptyset$

3) Soit $a>0$:
   - L'ensemble des solutions dans R de l'inéquation $x^2\leqslant a$ est $\left[-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}\right]$
   - L'ensemble des solutions dans R de l'inéquation $x^2<a$ est: $\left]-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}\right[$
   - L'ensemble des solutions dans R de l'inéquation $x^2\geqslant a$ est : $\left]-\infty\ ;\ -\sqrt{a}\right]\cup\left[\sqrt{a}\ ;\ +\infty\right[$
   - L'ensemble des solutions dans R de l'inéquation $x^2>a$ est : $\left]-\infty\ ;\ -\sqrt{a}\right[\cup\left]\sqrt{a}\ ;\ +\infty\right[$

Exemples:

a) $x^2\leqslant 9 \Leftrightarrow x\in[-3\ ;\ 3]$
b) $x^2>9 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty\ ;\ -3\right[\cup\left]3\ ;\ +\infty\right[$

3) Pour tout réel x, on a: $f(x)=f(-x)$.
On dit que la fonction carrée est *paire* .

Conséquences:

1) Deux nombres ***négatifs*** et leurs carrés sont rangés dans l'***ordre contraire***:
Soient $a<b<0$ alors $0<b^2<a^2$
2) Deux nombres ***positifs*** et leurs carrés sont rangés dans le ***même ordre:***
Soient $0<a<b$ alors $0<a^2<b^2$
3) Comme la fonction carrée est ***paire***, cela signifie que l'axe des ordonnés est un ***axe de symétrie*** pour la courbe représentative de la foncfion f (voir graphique).

Exemple:
Soient m et a des nombres réels

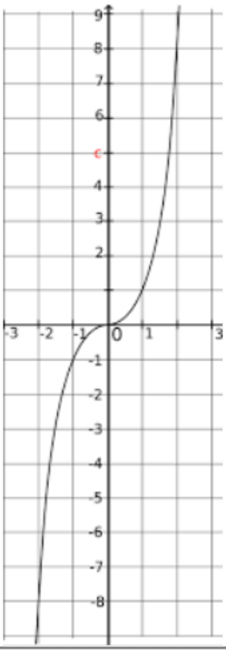
x	$-\infty$	a		-3		0		5		m	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	a^2	$\searrow$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	25	$\nearrow$	m^2	$\nearrow$

Si $a\leqslant -3$ alors $9\leqslant a^2$ car a et -3 sont négatifs donc leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire
Si $5\leqslant b$ alors $25\leqslant b^2$ car 5 et b sont positifs donc leurs carrés sont rangés dans le même ordre.

Fonctions Cubes:

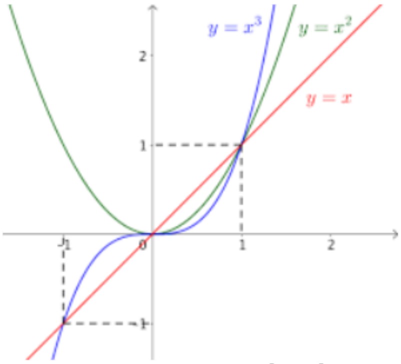
<table>
<tr><th>Définition et variations:</th><th>Propriétes:</th></tr>
<tr><td>
La fonction cube est la fonction définie pour tout x réel par:
$x \mapsto x^3$

Tableau de variations:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\nearrow$ 0 $\nearrow$</td></tr>
</table>

Représentation graphique:


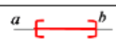
</td><td>
Propriétés:
1) Pour tout nombre réel a, l'équation $x^3 = a$ possède une unique solution.
2) On considère deux réels a et b, on a: $a^3 < b^3 \Leftrightarrow a < b$
3) Pour tout réel x, on a: $f(x) = -f(-x)$.
On dit que la fonction cube est impaire .

Conséquences:
Comme la fonction cube est impaire, cela signifie que l'origine du repère est le centre de symétrie pour la courbe représentative de la foncfion f (voir graphique).

Position relative des courbes: $y = x$; $y = x^2$ et $y = x^3$


1) Si $0 < x < 1$ alors $0 < x^3 < x^2 < x$
2) Si $1 < x$ alors $1 < x < x^2 < x^2$
</td></tr>
</table>

Réunion et intersection d'intervalles:

<table>
<tr><th>Intervalles:</th><th>Règles:</th><th>Exemples:</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>L'intervalle noté :</th><th>est l'ensemble des réels x tels que :</th><th>Représentation (en rouge) :</th></tr>
<tr><td>$[a;b]$</td><td>$a \leq x \leq b$</td><td></td></tr>
<tr><td>$[a;b[$</td><td>$a \leq x < b$</td><td></td></tr>
<tr><td>$]a;b]$</td><td>$a < x \leq b$</td><td></td></tr>
<tr><td>$]a;b[$</td><td>$a < x < b$</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>
On dit que le crochet est ouvert lorsqu'il est dirigé vers l'extérieur, cela veut dire que la valeur n'appartient pas à l'intervalle:
$[a\ ;\ b[$, en "b" le crochet est ouvert donc "b" n'appartient pas à l'intervalle.
</td><td>
Soit x_0 un nombre réel:
1) $]-\infty\ ;\ x_0[$ est l'ensemble des réels x vérifiant: $x < x_0$
2) $]-\infty\ ;\ x_0]$ est l'ensemble des réels x vérifiant: $x \leqslant x_0$
3) $]x_0\ ;\ +\infty[$ est l'ensemble des réels x vérifiant: $x > x$
4) $[x_0\ ;\ +\infty[$ est l'ensemble des réels x vérifiant: $x \geqslant x_0$
Attention:
L'intervalle est toujours ouvert du côté des symboles $\pm\infty$
</td></tr>
</table>

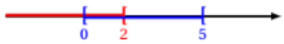
Représentation graphique

Exemples:

I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$:

$I \cup J$: ensemble de tous les nombres réels appartenant à "I" OU à "J"

$I \cap J$: ensemble de tous les nombres réels appartenant à "I" ET à "J"

Intervalle I	Intervalle J	$I \cup J$	$I \cap J$	Représentation sur la droite graduée
$[-10;2[$	$[-5;3]$	$[-10;3]$	$[-5;2[$	
$]-\infty;2[$	$[0;5[$	$]-\infty;5[$	$[0;2[$	
$[3;+\infty[$	$]-\infty;6]$	$\mathbb{R}$	$[3;6]$	
$]-\infty;-2[$	$]-4;-3[$	$]-\infty;-2[$	$]-4;-3[$	
$]-4;2]$	$[2;5]$	$]-4;5]$	$\{2\}$	
$]-4;2]$	$]2;5]$	$]-4;5]$	$\emptyset$	

Cas particuliers:

La réunion de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle.
L'intersection de deux intervalles peut être vide.

Exemple:

$I = [-6\ ;\ -1]$ et $L = [2\ ;\ +\infty[$

$I \cup L = [-6\ ;\ -1] \cup [2\ ;\ +\infty[$, on ne peut écrire $I \cup L$ sous la forme d'un intervalle

$I \cap L = \emptyset$ (= ensemble vide)

A retenir:

$\cup$: correspond à la partie colorée par au moins une couleur

$\cap$: correspond à la partie colorée par les deux couleurs

Inéquations produit de facteurs du 1er degré:

Propriétés:

1) Le produit de deux nombres réels de même signe est positif.
2) Le produit de deux nombres réels de signes contraires est négatif.

Méthodes:

Pour étudier le signe d'un produit :

1) On étudie le signe de chaque facteur.
2) On regroupe dans un tableau le signe de chaque facteur.
La première ligne du tableau contient les valeurs, rangées dans l'ordre croissant, qui annulent chacun des facteurs.
3) On utilise la règle des signes pour remplir la dernière ligne

Exemples:

1) Tableau de signes: (3x-5)(-2-x)

$3x-5=0 \iff 3x=5 \iff x=\frac{5}{3}$ et

$-2-x=0 \iff -x=2 \iff x=-2$

x	$-\infty$		-2		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(-2-x)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$(3x-5)(-2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2) Résoudre l'inégalité suivante:

$(3x+1)(2x+3)>0$

$3x+1=0 \iff 3x=-1 \iff x=\frac{-1}{3}$ et

$2x+3=0 \iff 2x=-3 \iff x=\frac{-3}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{-1}{3}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(3x+1)(2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$(3x+1)(2x+3)>0$ la solution est :

$\left]-\infty\ ;\ \frac{-3}{2}\right[\cup \left]\frac{-1}{3}\ ;\ +\infty\right[$