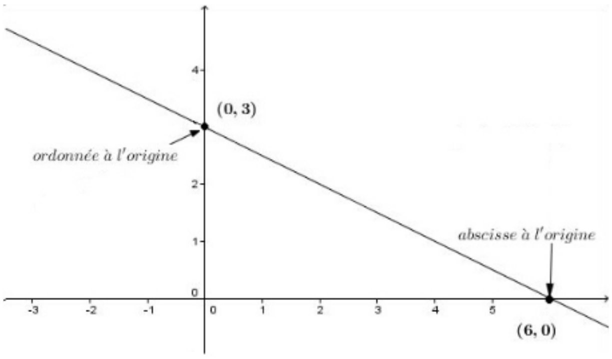
Fiche 3: Fonctions Affines

Le plan est muni d'un repère $(O ; I , J)$

Définition:
On considère deux réels m et p. **La fonction f définie sur par:** $\color{red}{f(x) = m\,x + p}$ **est appelée** ***fonction affine.*** **Sa représentation graphique est la** ***droite d*** **d'équation** $y = m\,x + p$ **- Le nombre a s'appelle le** ***coefficient directeur*** **(ou** ***pente de la droite)*** **de la droite:** **- Si $m > 0$, alors la droite est inclinée vers le haut;** **- Si $m < 0$, alors la droite est inclinée vers le bas;** **- Si $m = 0$, alors la droite est parallèle à l'axe des abscisses .** **- Le nombre p est** ***l'ordonnée à l'origine*** **: la droite passe par le point de coordonnées $(0 ; p)$.**



Exemple:

On cherche l'équation d'une droite, elle est de la forme $y = m\,x + p$

Cette droite passe par les points de coordonnées $A\,(0,1)$ et $B\left(\frac{1}{2} , 0\right)$

On est amené à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y_A = m\,x_A + p \\ y_B = m\,x_B + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ \frac{1}{2}\,m + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\,m = -p = -1 \\ p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ p = 1 \end{cases}$$

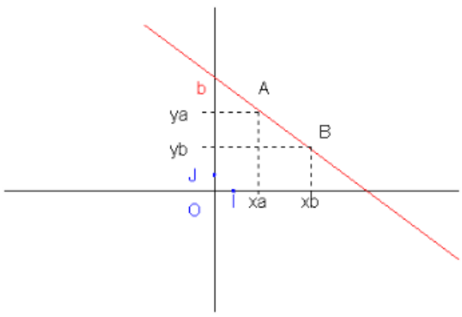
d'où l'équation de la droite est $y = -\,2\,x + 1$.

D'une façon générale, la recherche de l'équation d'une droite sous la forme $y = m\,x + p$ conduit à un système de deux équations à deux inconnues m et p.

Coefficient directeur:

Si une droite est non parallèle à l'un des axes de coordonnées et passe par les points $A\left(x_A , y_B\right)$ et $B\left(x_B , y_B\right)$, on a alors :

$$\color{red}{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}} \;.$$



On considère deux droites d et d' dont les équations réduites respectives sont:

d: $y = m\,x + p$ et d': $y = m'\,x + p'$

Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si, les coefficients directeurs sont égaux: $m = m'$.

Exemples:

1) On considère la droite passant par les points de coordonnées $A\,(0,1)$ et $B\left(\frac{1}{2} , 0\right)$

Le coefficient directeur vaut :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 1}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -1 \times \frac{2}{1} = -2$$

L'ordonnée à l'origine vaut:

$A \in (A\,B)$ donc $y_A = -2\,x_A + p \Leftrightarrow 1 = 0 + p$ soit $p = 1$

D'où l'équation de la droite est $y = -\,2\,x + 1$.

2) On considère les points $A\,(2 ; 14)$, $B\,(10 ; 38)$ et $C\,(-12 ; -28)$

Coefficient directeur de la droite $(A\,B)$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{38 - 14}{10 - 2} = \frac{24}{8} = 3$$

Coefficient directeur de la droite $(A\,C)$:

$$m' = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-28 - 14}{-12 - 2} = \frac{-42}{-14} = \frac{42}{14} = 3$$

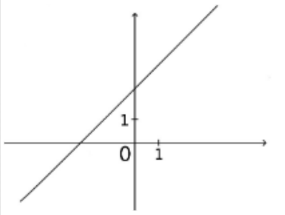
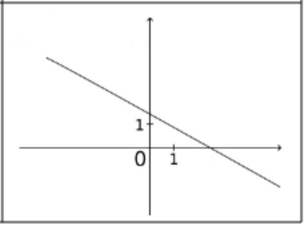
Conclusion:

$m = m'$ donc les droites $(A\,B)$ et $(A\,C)$ sont parallèles.

De plus, les points A,B et C sont alignés.

variations et signes d'une fonction affine:

Variations d'une fonction affine:

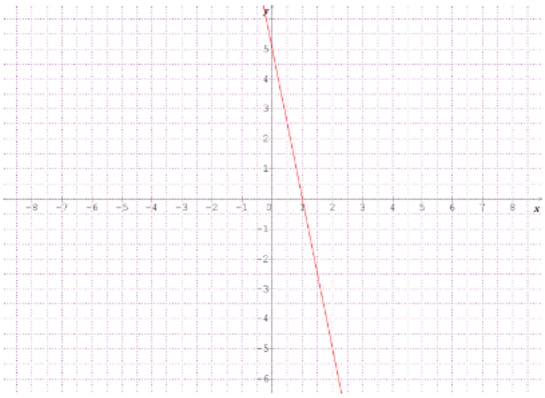
Cas 1: $m > 0$	**Cas 2:** $m < 0$
	

Exemples:

1) f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = -5x + 5$

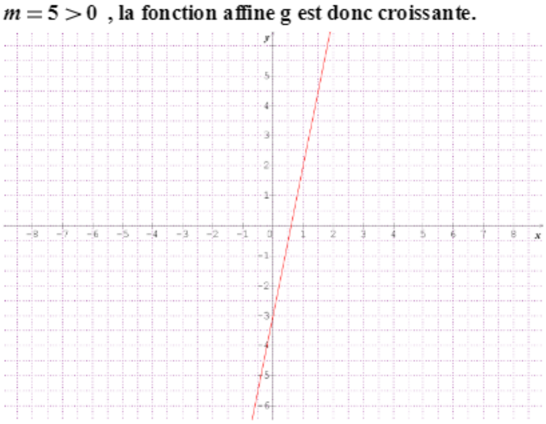
$m = -5 < 0$, la fonction affine f est donc décroissante.



2) g est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par:

$g(x) = 5x - 3$

$m = 5 > 0$, la fonction affine g est donc croissante.



Signes d'une fonction affine:

Pour étudier le signe de $f(x) = mx + p$ où $m \neq 0$:

On résout tout d'abord l'équation $f(x) = 0$:

$$mx + p = 0 \iff mx = -p \iff x = \frac{-p}{m}$$

Cas 1: $m > 0$

La fonction est croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-p/m$		$+\infty$
$f(x)=mx+p$		$-$	0	$+$	

Cas 2: $m < 0$

La fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-p/m$		$+\infty$
$f(x)=mx+p$		$+$	0	$-$	

Exemples:

1) f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par:

$f(x) = -5x + 5$

Le tableau de signes de $f(x)$: $m = -5 < 0$

$$f(x) = 0 \iff -5x + 5 = 0 \iff -5x = -5 \iff x = \frac{-5}{-5} \iff x = 1$$

x	$-\infty$		1		∞
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2) g est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par:

$g(x) = 5x - 3$

Le tableau de signes de $g(x)$: $m = 5 > 0$

$$g(x) = 0 \iff 5x - 3 = 0 \iff 5x = 3 \iff x = \frac{3}{5}$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		∞
$g(x)$		$-$	0	$+$	