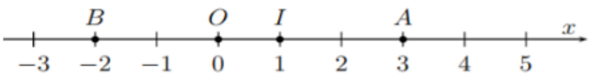
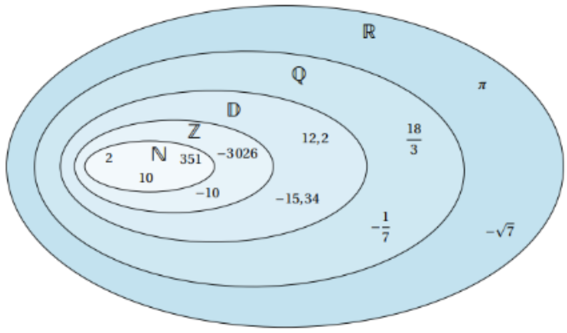
Fiche 1: Nombres

Les ensembles:

• Les *entiers naturels* sont les nombres 0, 1, 2, 3, ... :
ils constituent l'ensemble ℕ.
• Les *entiers relatifs* sont les nombres ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... :
ils constituent l'ensemble Z .
• Les *nombres décimaux* sont les nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$ où a est un entier relatif et n un entier naturel (on peut les écrire sous forme décimale avec un *nombre fini* de chiffres après la virgule : $\frac{3}{10} = 0{,}3 \in \mathbf{D}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbf{D}$):
ils constituent l'ensemble D .
• Les nombres de la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs avec $b \neq 0$ est l'ensemble des rationnels, noté Q .
Tout nombre rationnel a une forme irréductible
$\left(\frac{14}{21} = \frac{2\times 7}{3\times 7} = \frac{2}{3} \in \mathbf{Q}\right)$
• On considère une droite munie d'un repère (O;I)
On définit un repère (O, I) : O est l'origine (abscisse 0), I définit l'unité (abscisse 1



L'ensemble des abscisses des points de cette droite est appelé l'ensemble des nombres réels, noté ℝ.



• L'ensemble N des entiers naturels est inclus dans Z ;
• L'ensemble Z des entiers relatifs est inclus dans D ;
• L'ensemble D des nombres décimaux est inclus dans Q ;
• L'ensemble Q des nombres rationnels est inclus dans R .

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

Reconnaître les ensembles:

Appartient à	N	Z	D	Q	R
4	oui	oui	oui	oui	oui
-4	non	oui	oui	oui	oui
-0,56	non	non	oui	oui	oui
$\frac{2}{3}$	non	non	non	oui	oui
$\sqrt{2}$	non	non	non	non	oui

Critères de divisibilité:

1) Un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair (10 est divisible par 2).
2) Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (36 est divisble par 3 car $3+6=9$).
3) Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre constitué de son chiffre des dizaines et de celui de son chiffre des unités est divisible par 4 (216 est divisible par 4 car 16 est divisble par 4).
3) Un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 (10 et 25 sont divisibles par 5 car ils se terminent par 0 et par 5).
4) Un nombre entier est divisible par 6 s'il est pair et divisible par 3 (216 est divisible par 6 car 216 est pair et $2+1+6=9$ est divisible par 3).
5) Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 (36 est divisble par 9 car $3+6=9$).
6) Un nombre entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0 (80 est divisible par 10 car il se termine par 0).

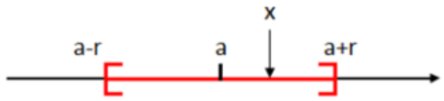
Exemple:
$\frac{375}{15} = \frac{5\times 75}{5\times 3} = \frac{75}{3} = \frac{3\times 25}{3\times 1} = \frac{25}{1}$

Multiples et diviseurs:

Nombres pairs:	*Nombres impairs:*
n est pair si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que: $n = 2k$ On dit que n est par car il est divisible par 2	n est impair si et seulement si il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que: $n = 2k+1$ On dit que n est impair car il n'est pas divisible par 2

Multiples et diviseurs:	*Nombres premiers:*
Soient a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$ On dit que *a est un multiple de b* ou que *b est un diviseur de a* si et seulement si le quotient $\frac{a}{b}$ est un entier naturel. OU ce qui revient au même: Il existe un entier naturel k tel que : $a = k \times b$ *Exemple:* $15 = 3 \times 5$ donc 15 est un multiple de 5 ou 5 est un diviseur de 15	Un entier naturel est premier si et seulement si il admet *exactement* deux diviseurs entiers naturels. *Exemples:* a) 1 n'est pas premier car il n'admet qu'un seul diviseur dans N b) 17 est premier car il admet 2 diviseurs 1 et 17

Intervalles et valeurs absolues:

Intervalles:	*Valeurs absolues:*
Soient deux réels a et b tels que $a < b$. • $a \leqslant x \leqslant b$ signifie que x appartient à l'intervalle $[a\ ;\ b]$; • $a < x < b$ signifie que x appartient à l'intervalle $]a\ ;\ b[$; • $a < x \leqslant b$ signifie que x appartient à l'intervalle $]a\ ;\ b]$; • $a \leqslant x < b$ signifie que x appartient à l'intervalle $[a\ ;\ b[$; • $a \leqslant x$ signifie que x appartient à l'intervalle $[a\ ;\ +\infty[$; • $a < x$ signifie que x appartient à l'intervalle $]a\ ;\ +\infty[$; • $x \leqslant a$ signifie que x appartient à l'intervalle]−∞;a]; • $x < a$ signifie que x appartient à l'intervalle]−∞;a[. *Attention:* a) Inégalité au sens stricte $<$ ou $>$: la borne n'appartient pas à l'intervalle; b) Inégalité au sens large $\leqslant$ ou $\geqslant$: la borne appartient à l'intervalle. *Exemples:* 1) $-5 \leqslant x \leqslant 2$ signifie que x est compris entre -5 et 2 d'où $x \in [-5\ ;\ 2]$ 2) $x > -5$ ou $-5 < x$ signifie que x est strictement supérieur à -5 'où $x \in]-5\ ;\ +\infty[$ L'intersection de deux intervalles est l'ensemble des nombres appartenant aux deux intervalles. L'union de deux intervalles est l'ensemble des nombres appartenant à l'un au moins des deux intervalles. (Retenir: ∪ = ou et ∩ = et) *Exemples:* 1) $[-6\ ;\ 3] \cap [12\ ;\ 20] = \emptyset$ (pas de nombres en commun) 2) $[-6\ ;\ 5] \cap [3\ ;\ 20] = [3\ ;\ 5]$ 3) $[-6\ ;\ 5] \cup [3\ ;\ 20] = [-6\ ;\ 20]$	$\lvert x\rvert = \begin{cases} x\ ,\ x \geqslant 0 \\ -x\ ,\ x < 0 \end{cases}$ *Exemples:* 1) $\lvert -12\rvert = -(-12) = 12$ 2) $\lvert 8\rvert = 8$ Soit a et b deux nombres réels . A) On appelle distance entre les nombres a et b, le nombre égal à: $\lvert b-a\rvert$ *Exemple:* Distance entre -15 et 5: $\lvert 5-(-15)\rvert = \lvert 5+15\rvert = 20$ Soit $a \in \mathrm{R}$ et $r \geqslant 0$: Dire que x est tel que $\lvert x-a\rvert \leqslant r$ signifie que $x \in [a-r\ ;\ a+r]$  *Exemples:* 1) $\lvert x-5\rvert = 2$ signifie que $x = 3$ ou $x = 7$ 2) $\lvert x-5\rvert \leqslant 2$ signifie que $x \in [5-2\ ;\ 5+2]$ soit $x \in [3\ ;\ 7]$ 3) $\lvert x-5\rvert \geqslant 2$ signifie que $x \in]-\infty\ ;\ 3] \cup [7\ ;\ +\infty[$

Puissances, fractions et racines carrées:

Puissances	Fractions:	Racines carrées:
Soit $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ et a un nombre 1) $a^n = a \times a \times \cdot\ \cdot \times a$ (n facteurs) 2) $a^0 = 1$ et $a^1 = a$ 3) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ $(a \neq 0)$ 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$ 5) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a \neq 0)$ 6) $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ 7) $a^n \times a^m = a^{n+m}$ *Ecriture scientifique:* Soit a un nombre décimal et n un entier relatif: $a \times 10^n$ avec $1 \leqslant \lvert a\rvert < 10$	1) $\frac{a \mp b}{c} = \frac{a}{c} \mp \frac{b}{c}$ 2) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,d + b\,c}{b\,d}$ 2) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ 3) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ 4) $\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$ 5) $b \neq 0$ et $d \neq 0$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$ (produit en croix)	Soit a un réel positif, on a: $\sqrt{a^2} = a$ et $\sqrt{a}^{\,2} = a$ Soient a et b deux réels positis: 1) $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ 2) $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ 3) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$ 4) $x^2 = a$ $(a < 0)$: pas de solution 5) $x^2 = a$ $(a > 0)$: deux solutions: $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Exemples:

1) $A = \dfrac{15\times10^{-3}\times7\times10^{7}}{5\times10^{2}} = \dfrac{3\times5\times7}{5}\times10^{-3+7}\times10^{-2} = 21\times10^{4}\times10^{-2} = 21\times10^{2}$

Ecriture scienttifique: $A = 2,1\times10^{3}$

2) $B = \dfrac{4}{5} - \dfrac{7}{5}\times\dfrac{10}{4} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{7\times2\times5}{5\times2\times2} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{7}{2} = \dfrac{4\times2}{5\times2} - \dfrac{7\times5}{2\times5} = \dfrac{8}{10} - \dfrac{35}{10} = \dfrac{-27}{10}$

3) $x^{2} = 36$, $36 > 0$ **donc 2 solutions**

$x = \sqrt{36}$ **ou** $x = -\sqrt{36}$

Les solutions sont -6 et 6

4) $C = \sqrt{450} = \sqrt{45\times10} = \sqrt{9\times5\times2\times5} = \sqrt{3^{2}\times5^{2}\times2} = \sqrt{3^{2}}\times\sqrt{5^{2}}\times\sqrt{2} = 3\times5\times\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$